

JEU DE PIERRE-FEUILLE-CISEAUX

année 2012

Elèves de 3^{ème} :

JEAN-MALINGRE Jérémy, ORSINI François,
PERNEE Lucie, POUTEAU Clément,
ROGNON Nathanael et VICHOT Aurélie.

Elèves de 4^{ème} :

Pierre BILLET. Avec la participation de
Matthieu CHAMPERNAUD et d'Antoine
GAUCHELER

Etablissements :

Collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier,
91 402 Orsay Cedex.

Collège Charles Péguy, Palaiseau.

Enseignantes :

ASSELAIN-MISSENARD Claudie,
DAMONGEOT Cécile et FERRY Florence.

Chercheurs :

AGUILLON Nina et COULAUD Olivier.

Le sujet :

Un joueur A propose à un joueur B, connu pour sa naïveté, de jouer à Pierre/Feuille/Ciseaux/Puits. Il sait que B va jouer au hasard à chaque coup. Le jeu est-il équitable ?

Le jour B, qui sait que A est parfois malhonnête, peut-il proposer un jeu à 5 symboles ?

Peut-on proposer un jeu de Pierre/Feuille/Ciseaux à trois ?

I. Règle du jeu

a. Pour trois signes et deux joueurs : jeu simple de Pierre/Feuille/Ciseaux

Deux personnes font un geste simultané avec leur main, pour représenter soit une pierre, soit une feuille, soit des ciseaux.

- La pierre casse les ciseaux : la pierre gagne contre les ciseaux.
- La feuille enveloppe la pierre : la feuille gagne contre la pierre.
- Les ciseaux coupent la feuille : les ciseaux gagnent contre la feuille.
- Si les deux joueurs font le même signe, il y a égalité.

b. Pour quatre signes et deux joueurs : Pierre/Feuille/Ciseaux/Puits

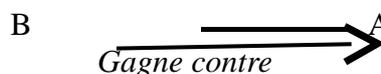
- La feuille recouvre la pierre et le puits.
- la pierre casse les ciseaux.
- les ciseaux et la pierre tombent dans le puits.
- les ciseaux coupent la feuille.

Lors de nos premières séances nous avons joué à Pierre/Feuille/Ciseau afin de pouvoir émettre une hypothèse sur les chances de gagner et de perdre. Nous avons procédé de la même manière lorsque l'on rajoutait des joueurs ou des signes. Nous pensions qu'il serait bien d'essayer de nous faire une idée des résultats avant de tenter de prouver quoi que ce soit. Nous notions dans un cahier ce que nous obtenions à la fin de chaque séance dans le but de pouvoir rédiger notre exposé à la fin de l'année et de mesurer les progrès que nous réalisons.

II. Représentations des résultats

Nous avons représenté nos résultats de deux façons :

- Par un schéma sous forme de graphe et des flèches :



- Par un tableau :

	A	B
A	=	-
B	+	=

Le tableau représente la réaction des lignes par rapport aux colonnes :

Le signe « + » représente la victoire, le signe « - » la défaite et le signe « = » l'égalité.

Par exemple ici, B gagne A, ce qui se traduit par un « + » sur la troisième ligne de la deuxième colonne.

Il est ainsi possible de jouer à un jeu de Pierre/Feuille/Ciseaux à 3, 4, 5, 6, 7... symboles, de représenter ces jeux sous forme de schéma ou de tableau et de les étudier.

III. Equitable ?

Dans cette partie nous allons étudier les jeux à deux joueurs. Sont-ils équitables ?

a. Jeu à trois symboles

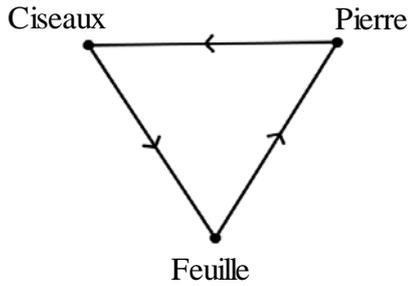


fig1

↷	Pierre	Feuille	Ciseaux
Pierre	=	-	+
Feuille	+	=	-
Ciseaux	-	+	=

Ce jeu, à trois symboles, est équitable : chaque symbole a autant de chances de gagner que de perdre. En effet, sur le schéma, on constate que chaque symbole a une flèche gagnante qui part et une flèche perdante qui arrive. Dans le tableau, chaque symbole (donc chaque ligne) a un « + » et un moins « - ».

Nous avons ici une première vue de ce que sera un jeu équitable :

Sur le schéma : autant de flèches gagnantes et perdantes pour chaque symbole.

Dans le tableau :

- autant de signes « + » et « - » pour chaque symbole, c'est à dire sur chaque ligne. Ceci impose qu'il y ait autant de signes « + » et « - » pour chaque colonne.
- des signes « = » le long de la diagonale

b. Jeu à quatre symboles

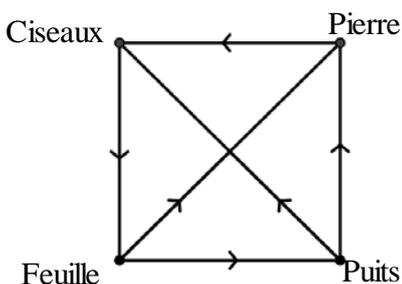


fig2

↷	Pierre	Feuille	Ciseaux	Puits
Pierre	=	-	+	-
feuille	+	=	-	+
Ciseaux	-	+	=	-
Puits	+	-	+	=

- En regardant tout d'abord le graphe, on s'aperçoit que, de Puits et de Feuille, partent deux flèches gagnantes et arrive une perdante ; alors que des deux autres symboles, il n'en part qu'une seule gagnante et arrivent deux perdantes.

- En regardant maintenant le tableau, les lignes et les colonnes n'ont pas le même nombre de « + » et de « - » ; ce que nous avons observé sur le graphe s'observe de la même façon sur les signes.

Nous pouvons donc affirmer que ce jeu n'est pas équitable puisque Puits et Feuille ont deux fois plus de possibilités de gagner que les autres symboles. (1)

c. Jeu à cinq symboles

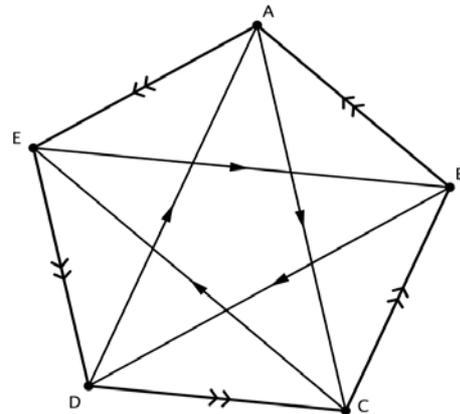


fig3

↷	A	B	C	D	E
A	=	-	+	-	+
B	+	=	-	+	-
C	-	+	=	-	+
D	+	-	+	=	-
E	-	+	-	+	=

Sur le graphe : autant de flèches gagnantes et perdantes pour chaque symbole.

Dans le tableau : autant de signes « + » et « - » pour chaque symbole, c'est à dire sur chaque ligne. Ceci impose qu'il y ait autant de signes « + » et « - » pour chaque colonne.

Ce jeu est équitable.

d. Jeu à six symboles

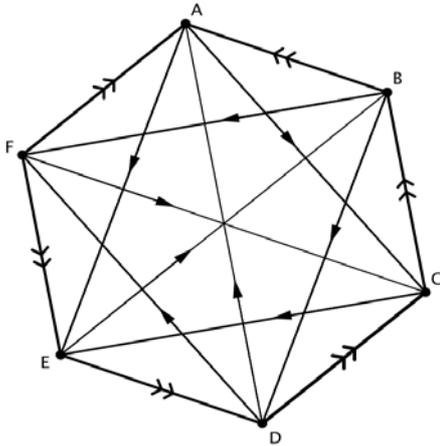


fig4

↪	A	B	C	D	E	F
A	=	-	+	-	+	-
B	+	=	-	+	-	+
C	-	+	=	-	+	-
D	+	-	+	=	-	+
E	-	+	-	+	=	-
F	+	-	+	-	+	=

Sur le graphe : pour chaque symbole, le nombre de flèches gagnantes et perdantes n'est pas le même.

Dans le tableau :

- Pour une ligne donnée (ou une colonne) le nombre de signes « + » et de signes « - » n'est pas identique.

Que ce soit sur le graphe ou dans le tableau, on s'aperçoit donc que certains symboles ont plus de chances de gagner que les autres. Ce jeu n'est pas équitable. (2)

e. Généralisation

Lorsque le nombre de symboles est impair, on peut trouver une règle pour que le jeu soit équitable. Dans ce cas, chaque symbole a autant

de chances de gagner que de perdre.

Lorsque le nombre de symboles est pair, le jeu tel que nous l'avons construit ne peut pas être équitable.

III. Peut-on rendre tous les jeux équitables ?

La question que nous nous sommes posée ensuite, a été : peut-on, en changeant certains signes du tableau rendre tous les jeux équitables ? Le problème se pose pour un jeu possédant un nombre pair de symboles.

En changeant des signes, il faudra toujours garder la symétrie « inversée » sur les signes par rapport à la diagonale (en effet, si A perd contre B alors cela impose immédiatement que B gagne contre A).

Reprenons donc nos tableaux en changeant quelques signes. (3)

↪	A	B	C	D
A	=	-	+	=
B	+	=	=	-
C	-	=	=	+
D	=	+	-	=

Le jeu est devenu équitable. Voici le graphe qui correspond (les liens en pointillés sont ceux que nous avons enlevés en mettant des signes « = ») :

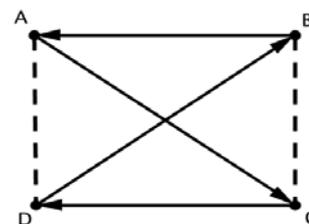


fig5

Jeux équitables à 6 symboles:

↪	A	B	C	D	E	F
A	=	+	-	+	-	=
B	-	=	+	-	=	-
C	+	-	=	=	-	+
D	-	+	=	=	+	-
E	+	=	+	-	=	+
F	=	+	-	+	-	=

Et voici le graphe qui correspond :

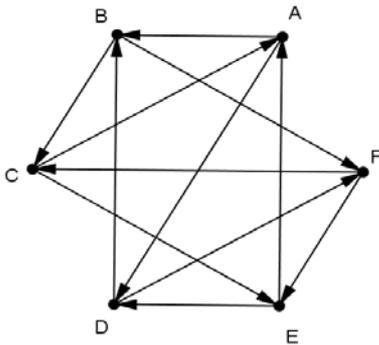


fig6

Le graphe commence à devenir compliqué mais on voit bien que de chaque symbole partent 2 flèches gagnantes et 2 perdantes.

Conclusion

Quel que soit le nombre de symboles, il est toujours possible de générer un jeu équitable.

IV. Jeu à trois joueurs

L'étude ici ne se fera que sur le graphe, le tableau n'est plus adapté pour le jeu à 3 joueurs. Il va nous falloir définir des règles précises.

a. Jeu à trois symboles

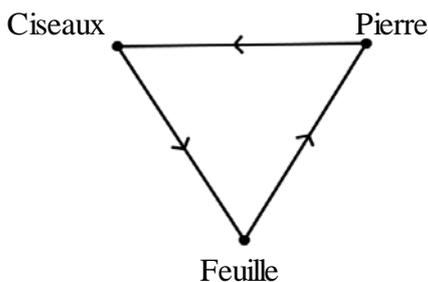


fig7

Règle du jeu : lorsque 2 joueurs jouent le même symbole, on compare avec le troisième et on applique la règle du graphe.

Lorsque les 3 joueurs jouent des symboles différents, on considère qu'il y a égalité et que donc personne ne gagne. Il en est de même lorsque les 3 symboles joués sont identiques.

Notons Pierre-Feuille-Ciseaux respectivement A, B et C. Voici les différentes possibilités de jeu :

- AAA : il ne se passe rien
- AAB : B gagne
- AAC : A gagne

- ABB : B gagne
- ABC : il ne se passe rien
- ACC : A gagne
- BBB : il ne se passe rien
- BBC : C gagne
- BCC : C gagne
- CCC : il ne se passe rien

Ce jeu paraît équitable mais n'est pas très intéressant.

Variante : si 2 signes sont identiques, c'est le 3ème joueur qui a joué un signe différent qui gagne :

- AAA : il ne se passe rien
- AAB : B gagne
- AAC : C gagne
- ABB : A gagne
- ABC : il ne se passe rien
- ACC : A gagne
- BBB : il ne se passe rien
- BBC : C gagne
- BCC : B gagne
- CCC : il ne se passe rien

Ce jeu est encore équitable.

b. Jeu à quatre symboles

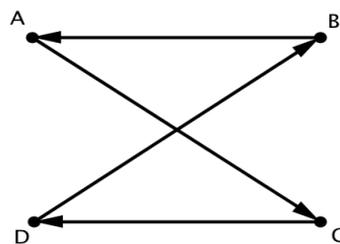


fig8

Première règle possible : on ne considère que les cas où les 3 symboles joués sont différents ; dans le cas contraire, on recommence.

Différentes possibilités :

- ABC : B gagne
- ABD : D gagne
- ACD : A gagne
- BCD : C gagne

Ce jeu est équitable.

Deuxième règle possible : si 2 symboles sont identiques, le troisième gagne ; ce jeu est équitable et permet d'avoir plus de possibilités de jeu.

c. Jeu à cinq symboles

Pour ce jeu, nous avons inventé de nouvelles règles : nous avons pris des symboles qui « tuent » plus ou moins rapidement les autres symboles. Sur le graphe suivant, les liens rapides sont représentés avec une double flèche et les autres sont des liens lents.

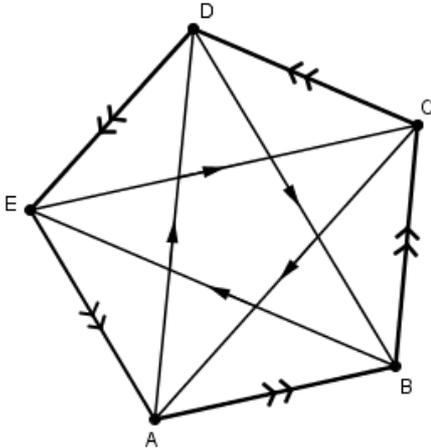


fig9

Exemple ici :

A tue rapidement B, tue lentement D et se fait tuer rapidement par E.

Pour bien comprendre ce nouveau mode de fonctionnement, prenons un exemple : nos 3 joueurs joues A, B et C. A et B tuent rapidement et simultanément respectivement B et C. C aurait dû tuer A mais comme il est plus lent, il sera tué avant par B. Finalement, c'est A qui gagne cette partie.

On ne prend en compte, comme le jeu précédent, que les cas où les 3 symboles mis en jeu sont différents.

Voici les différentes possibilités de jeu :

- ABC : A gagne
- ABD : A gagne
- ABE : E gagne
- ACD : C gagne
- ACE : E gagne
- ADE : D gagne
- BCD : B gagne
- BCE : B gagne
- BDE : D gagne
- CDE : C gagne

Ce jeu est équitable.

d. Jeu à six symboles

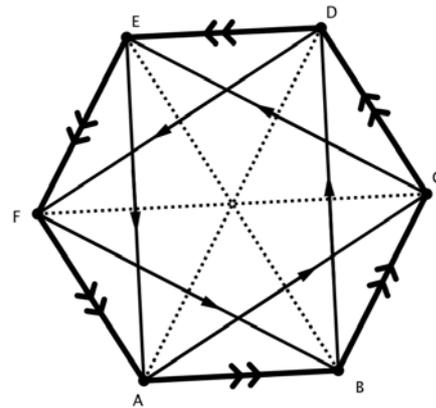


fig10

Nous voyons apparaître ici des liens en pointillés sur lesquels nous ne pouvons pas rajouter des flèches si on veut avoir un jeu équitable : on considèrera que ce sont des liens sans influence.

Voici les différentes possibilités de jeu (lorsque les 3 symboles mis en jeu sont différents) :

- | | |
|---------------|-----------------|
| ABC : A gagne | BCD : B gagne |
| ABD : A gagne | BCE : B gagne |
| ABE : E gagne | BCF : F gagne |
| ABF : F gagne | BDE : B égalité |
| ACD : A gagne | BDF : égalité |
| ACE : égalité | BEF : E gagne |
| ACF : F gagne | CDE : C gagne |
| ADE : D gagne | CDF : C gagne |
| ADF : D gagne | CEF : C gagne |
| AEF : E gagne | DEF : D gagne |

Ce jeu est encore équitable, chaque symbole gagne 3 fois.

Notes de l'édition

(1) Il ne suffit pas de regarder ce cas particulier pour conclure que le jeu ne peut pas être rendu équitable en changeant les règles. Mais dans chaque colonne il y a seulement 3 cases à remplir et donc il est impossible d'avoir autant de + que de -, ce jeu ne peut donc pas être rendu équitable

(2) On peut faire ici la même remarque que pour le jeu à 4 symboles, en effet cette règle rend inéquitable le jeu mais il est impossible de le rendre équitable car il y a 5 choix par colonne et donc il ne peut pas avoir autant de + que de -

(3) Il faudrait être un peu plus précis sur ce qui est demandé car il est toujours possible de dire qu'il y a toujours égalité et le jeu est alors équitable