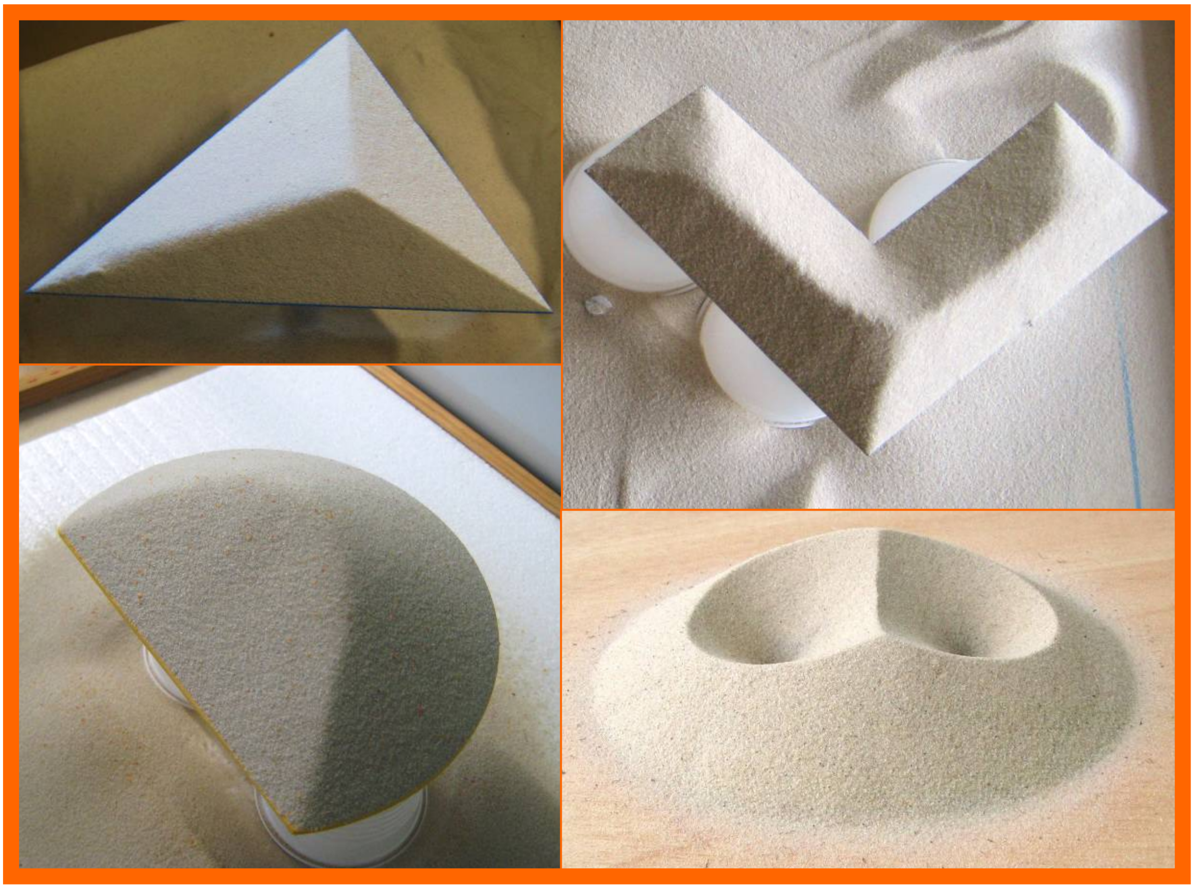
La GEOMETRIE du TAS de SABLE

Chloé Milsonneau, Caroline Anger, Pierre Chaligné, Gwendoline Lecomte, Alexandre Daumin et Damien Bouasba
Elèves de 4e et 3e des collèges Vieux colombier (Le Mans) et Vieux Chêne (La Flèche)

Années 2007-2008 et 2008-2009



Sujet

1. On verse du sable régulièrement en un point d'une surface plane, un tas se forme. Voilà devant nous un bel « objet mathématique ». Que peut-on connaître de cet objet ? Mesurer ? Calculer ? Et que se passe-t-il si on verse encore plus de sable ? Et si on prend un autre sable ? Puis, on pourra observer ce qui se passe si on fait évoluer le tas. Par exemple en perçant un trou au centre de sa base. Et si, au lieu de verser le sable

sur une large surface on le versait seulement sur un carré, ou sur un rectangle, ou sur un triangle, un losange, un hexagone...?
L'activité passera donc par des étapes de manipulations, d'observations, puis de mesures. Ensuite on se demandera ce qu'on peut calculer avec les quelques données à notre disposition ; on recherchera les moyens offerts par les mathématiques pour effectuer ces calculs.

2. Observer des tas de sable et utiliser des mathématiques pour réfuter ou confirmer les observations ; Tas à base en forme de *L*, tas à base en forme de *D* (disque coupé). Approche des coniques avec les connaissances du collège.

I-2-Présentation des propriétés physiques du tas de sable « naturel »

SABLE: nom masculin (latin Sabulum) roche sédimentaire meuble, formée de grains, souvent quartzeux. Du point de vue de la sédimentologie, la taille des grains est comprise entre 62,5 µm et 2 mm.

Donc, toute roche ne répondant pas à une de ces propriétés (ou les deux) n'est pas appelée « sable ». Mais aussi, par extension, des matériaux non rocheux peuvent répondre à ces critères, par exemple du sucre en poudre.

A Bordeaux nous sommes allés visiter un laboratoire où les chercheurs étudient les matériaux en grains, en particulier le sable. Nous avons encore mieux compris que c'est un milieu étrange qui a, à la fois, des propriétés de gaz, de liquide et de solide. On sait encore peu de choses sur ce milieu et c'est pourquoi beaucoup de scientifiques s'y intéressent.

En 2000, année mondiale des mathématiques, un plasticien sarthois, *Jean-Bernard Métais,* avait installé un sablier géant dans le Jardin des Plantes à Paris. C'est ce qui a donné l'envie à notre professeur de faire des applications en mathématiques au collège.
http://www.jbmetais.com/web-content/www/phototemps%20imparti.swf
En particulier, Jean-Bernard Métais avait reçu l'aide d'un physicien de l'université de Jussieu à Paris et il avait beaucoup insisté sur une propriété physique *des tas de sable naturels* :

Quand on verse du sable sur un plan horizontal, il s'installe naturellement pour former un cône dont l'angle de base est constant ; on appellera cet angle *l'angle de talus*.

Nous avons utilisé des photographies de tas de sable avec des grains et des hauteurs différentes pour évaluer l'angle de talus. Nos résultats étaient entre 32° et 34° et nous avons admis comme valeur moyenne : $\theta = 33°$.
Nous n'utiliserons 33° que pour des calculs de quantités. Pour les démonstrations nous noterons l'angle de talus, θ.

Cette propriété nous permet de dire que tous les tas sont semblables.

II- A PROPOS DES ECOULEMENTS

Matériel : Un plateau horizontal percé d'un trou de quelques millimètres de diamètre. Pour la géométrie, le trou sera considéré comme ponctuel (diamètre négligeable) et on appelle O ce point. Ce plateau est placé sur des supports qui permettront un écoulement libre du sable recueilli sur une surface plane et horizontale.

II-1- Première situation : le trou est au centre du disque de base

Expérience, observation.

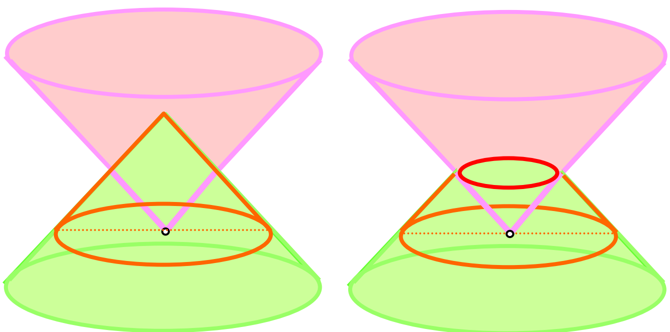
L'orifice est bouché. Nous versons du sable sur le point O. Il s'installe naturellement en formant un cône dont :

- la base est un disque centré en O et dont le diamètre dépend de la quantité de sable versé. Nous notons R le rayon de ce disque.
- l'angle de base du cône est l'angle de talus θ.

Nous ouvrons l'orifice. Le sable s'écoule, formant sous le plateau un autre cône. Peu à peu le cône supérieur se creuse. Puis l'écoulement cesse. Le tas de sable est dans une nouvelle situation d'équilibre : une sorte de couronne et, dans le cratère, l'angle de talus est θ.

Au niveau inférieur, le cône formé est un modèle réduit du cône initial.

Nous avons pu observer qu'il se forme une ligne de crête qui ressemble à un cercle et qui semble être parallèle au plan de base. On peut imaginer que nous avons produit une intersection de deux cônes : l'un de sable, l'autre de vide.



Questions

Nous avons alors cherché à répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la hauteur du cône initial ? Quel est son volume?
- Quel est le rapport de réduction entre les deux cônes ?
- Quels sont les volumes du sable restant après l'écoulement et du cône inférieur ?

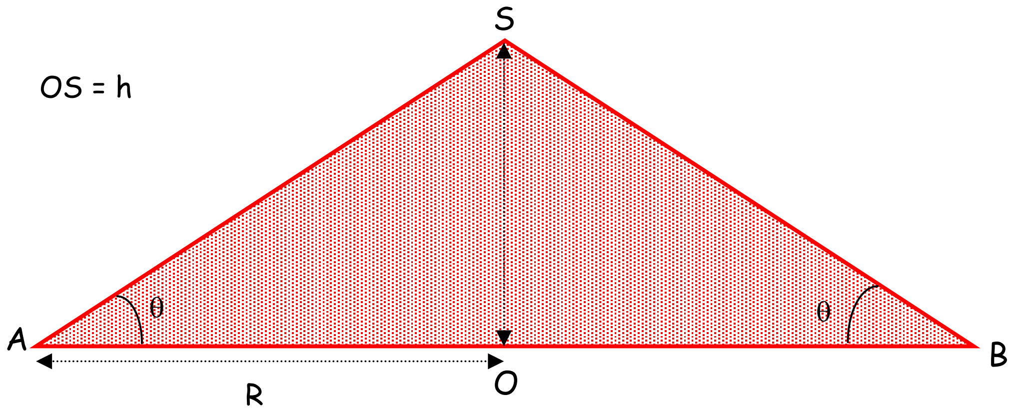
Analyse mathématique de cette situation

Un schéma en coupe du tas initial va nous permettre de calculer la hauteur ; le plan de coupe est perpendiculaire à la base et passe par O.

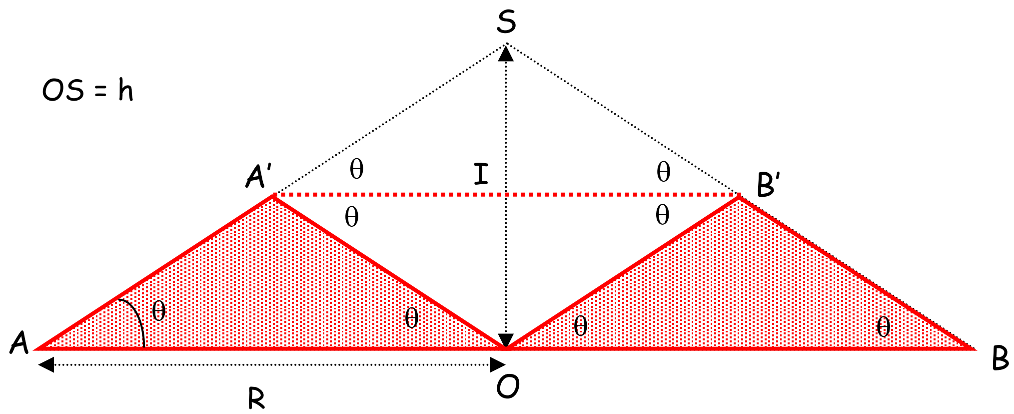
Nous avons utilisé la trigonométrie dans OSA rectangle en O : $h = OS = R \tan \theta$

Le volume est donc : $V = (\pi R^2)(R \tan \theta) / 3 = \pi R^3 \tan \theta / 3$

Il suffit de connaître R pour connaître le volume V du tas.



Pour trouver le rapport de réduction, nous sommes passés par le même schéma en coupe du tas restant.



Dans ce plan, le triangle ASB est la trace du cône initial ; en rouge la trace du tas restant. On repère tous les angles égaux à θ et on en déduit que (OB')//(AS) , (A'B')//(AB), (BS)//(OA'). AS est donc partagé par trois droites des milieux en quatre triangles superposables. Le rapport de réduction pour passer de ASB à l'un de ces petits triangles est donc 1/2. Et le rapport des volumes sera 1/8.
Le volume V' de sable écoulé est le double du volume du cône de trace SA'B'.

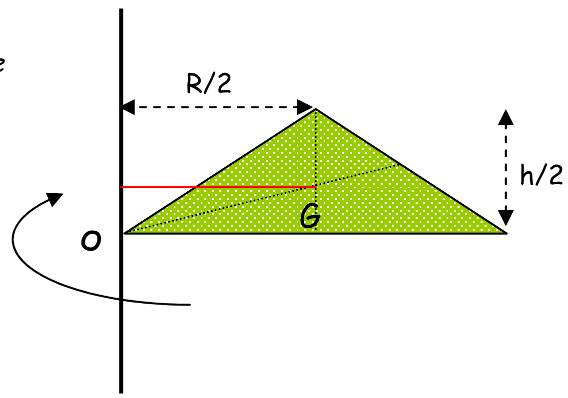
$$V' = 2\ V/8 \quad \text{ou} \quad V' = V/4$$

Le rapport de réduction de V à V' est 1 sur racine cubique de 4.
Et le volume de sable restant sur le plateau est $V'' = V - V' = 3V/4$

<u>Autre façon de connaître le volume de sable restant : théorème de Guldin.</u>

« Le volume du solide engendré par la révolution d'une surface quelconque autour d'un axe est égal au produit de l'aire de cette surface par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité de cette surface »

Si R est le rayon du tas initial et h sa hauteur:
$V'' = 2 \times \Pi \times (R/2) \times A$ et $A = R \times (h/2) \times 1/2$
$V'' = (\Pi \times R^2 \times h) / 4$, or $V = (\Pi \times R^2 \times h) /3$; $V'' = 3V/4$
 Ce qui confirme le résultat précédent.   (1)



Nature de la ligne de crête

Cette ligne de crête est constituée de tous les points A' (ou B'). On a démontré que tous les points A' et B' sont à la même « altitude », h/2. Donc la ligne est plane et parallèle au disque de base (horizontal).

D'autre part IA'=IB' ; tous les points qui constituent cette ligne sont équidistants de I :

La ligne de crête est un cercle de centre I et de rayon R/2.

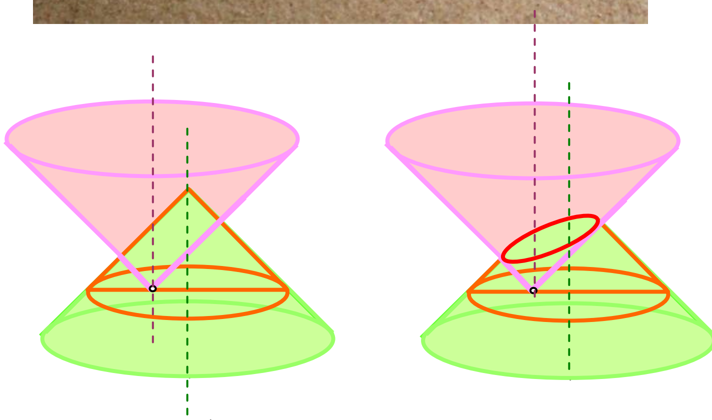
II-2- Deuxième situation : Le trou n'est plus au centre

Expérience, observation.

Nous avons utilisé le même mode opératoire que pour le cas précédent.

Lorsque l'écoulement s'arrête, nous pouvons constater que la couronne de sable est toujours percée d'un cratère mais la ligne de crête a changé : au lieu d'obtenir un cercle parallèle à la base, nous obtenons un *ovale incliné*. Nos professeurs et notre chercheur nous ont dit qu'il s'agirait d'une *ellipse*…

Quand le sable a retrouvé sa position d'équilibre, nous avons deux cônes : l'un est plein (en vert), l'autre est un cône vide (en rose). C'est deux fois le même cône : même angle de base et leurs axes sont parallèles puisque par gravité, l'entassement et l'écoulement se font verticalement.



Nous avons reproduit cette expérience avec des orifices situés de plus en plus loin du centre du disque de base : plus l'orifice est loin du centre, plus l'*ellipse* s'allonge.

Questions :

- Comment caractériser cette ligne de crête ?
- Qu'est-ce qu'une ellipse ?
- La ligne observée est-elle vraiment une ellipse ? En particulier est-elle plane ?

Analyse mathématique de cette ligne de crête

Notre première impression était un ovale, un cercle aplati. On nous parle d'ellipse mais aussi d'ellipse du jardinier. Nous avons donc un peu oublié le sable pour chercher dans toutes ces directions. En remarquant qu'il s'agit de courbes planes et que nous ne sommes pas sûrs que cette ligne de crête soit plane…

II-3- Enquête sur les ellipses

Il s'agit de caractériser, avec nos connaissances de collégiens, cette ligne de crête.

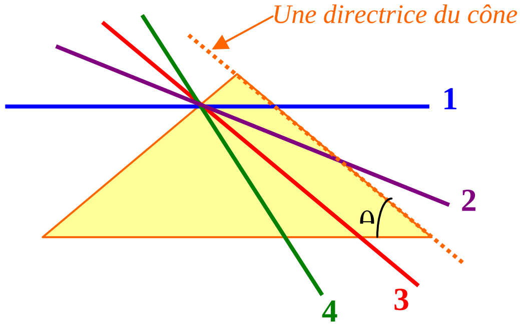
Nos professeurs nous disent :

- Elle est plane mais c'est difficile pour nous de le démontrer. Nous admettrons que c'est une ligne plane.

- C'est une conique, c'est-à-dire l'intersection d'un cône et d'un plan.
- Il y a plusieurs sortes de coniques et celle-ci est une ellipse.

Conique : Intersection d'un cône et d'un plan

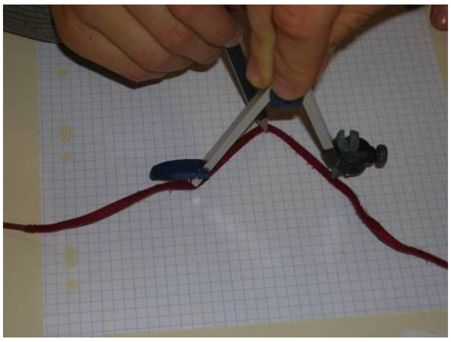
Nous observons que si θ est l'angle de base du cône, le plan (ici en coupe) peut occuper plusieurs positions.



1- S'il est parallèle à la base, l'intersection est alors un cercle. C'est ce que nous avons observé au moment de l'écoulement du sable par un trou situé au centre du disque de base. Nous avions démontré alors que la ligne de crête était plane et circulaire. Un cercle fait donc partie de la famille des coniques.
2- L'angle que fait le plan avec le plan de base est inférieur à θ on obtiendrait une courbe appelée ellipse,
3- L'angle que fait le plan avec le plan de base est égal à θ on obtiendrait une courbe appelée parabole,
4- L'angle que fait le plan avec le plan de base est supérieur à θ on obtiendrait une courbe appelée hyperbole.

Expérience : l'ellipse du jardinier

Nous avons tracé des ellipses que l'on appelle du jardinier car c'est la méthode qu'utilise le jardinier pour tracer ses parterres en formes d'ellipses.



La méthode:

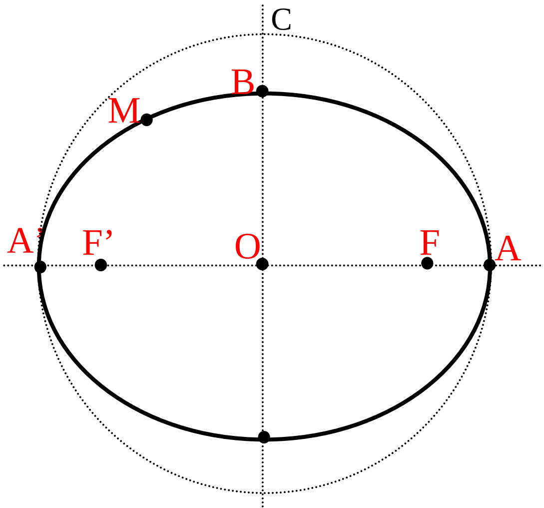
Nous prenons un compas à deux pointes et une ficelle. Nous piquons la ficelle avec les deux pointes. La ficelle entre les deux pointes ne doit pas être tendue. Nous piquons les deux pointes sur une feuille de papier avec notre crayon nous tendons la ficelle. Et nous traçons en gardant la ficelle tendue: nous obtenons une ligne courbe qui s'appelle ellipse « du jardinier »

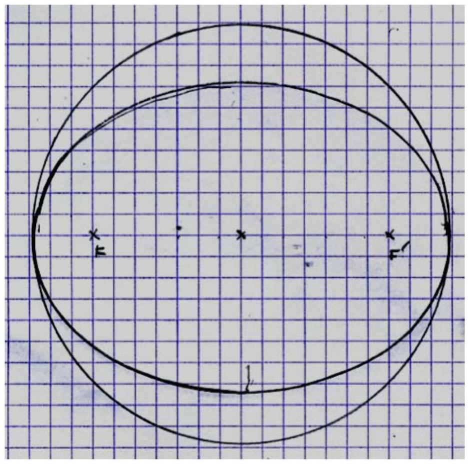
Nous mettons en évidence quelques points qui nous serons utiles.

- F et F' sont les points où l'on a piqué les pointes du compas ; on les appellera les *foyers*.
- O est le milieu de [FF'].
- M est un point quelconque de la ligne obtenue.
- A et A' sont les deux points les plus éloignés de O.
- B est l'un des points intersections de l'ellipse et de la perpendiculaire à (AO) passant par O.

Nous avons tracé le cercle circonscrit à l'ellipse ; son diamètre est [AA']. P est son intersection avec (OB)

Remarque : nous avons expérimenté d'autres dispositifs équivalents.





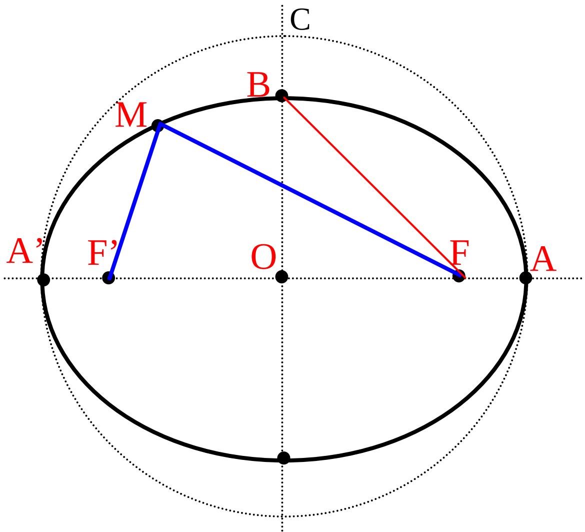
Des expériences successives, en modifiant deux paramètres, nous montrent que:

- Pour une ficelle de longueur constante, si nous écartons les foyers l'ellipse s'éloigne du cercle ; elle s'aplatit mais passe toujours par A et A'. A l'inverse si nous rapprochons les foyers alors l'ellipse se rapprochera du cercle jusqu'à se confondre avec lui lorsque les deux foyers sont confondus en O. On constate donc que le cercle du jardinier est un cas particulier de l'ellipse du jardinier.
- Si nous piquons toujours en F et F' fixes, mais que nous modifions la longueur de ficelle entre F et F' nous obtenons la même courbe mais à une autre échelle.

Analyse mathématique de la courbe obtenue

On décide de noter : $a = OA$ et $b = OB$

Alexandre, un élève de notre groupe, est parti sur une fausse piste. Il lui semblait que BC mesurait le quart de FF'. On a cherché à le prouver.



FM + FM' = L (c'est la longueur de la ficelle)
Si M est en A, FA + F'A = L or FA = a - OF et F'A = a + OF. Donc **L = 2a**
Si M est en B, FB + F'B = L= 2a or FB=F'B donc

FB = a

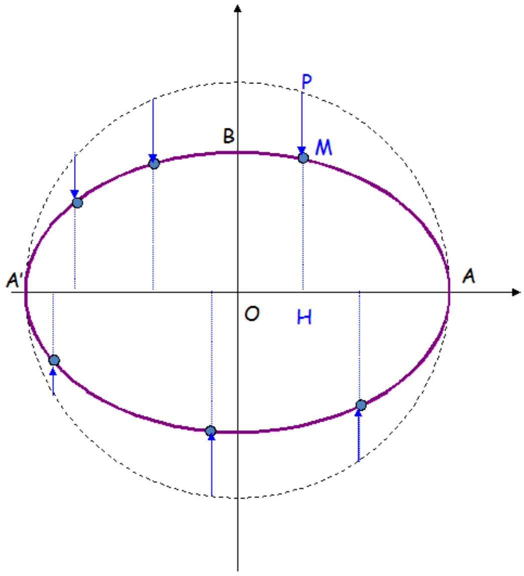
Dans le triangle FOB rectangle en O, on applique le théorème de Pythagore :
$OB^2+OF^2 = BF^2$; $OF^2+ b^2 = a^2$; $\mathbf{OF^2 = a^2-b^2}$
$BC^2 = (a - b)^2$ et $FF'^2 = 2\ (a^2 - b^2)$ ce qui prouvait que la conjecture faite par Alexandre était fausse mais cela nous avait permis de trouver des résultats très intéressants pour la suite du travail.

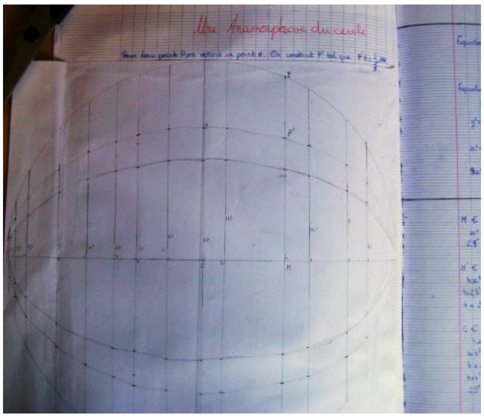
Retour à l'observation et construction d'une nouvelle courbe

En observant l'ellipse du jardinier et son cercle circonscrit nous pensons qu'une transformation géométrique pourrait permettre de transformer le cercle en ellipse : un « aplatissement ». Il ne s'agit pas d'une isométrie puisqu'elle ne conserve pas la forme. On propose la définition suivante :
Un cercle de diamètre [AA'], P est un point quelconque de ce cercle et H est le pied de la perpendiculaire à AA' passant par P. On donne un nombre $k \leq 1$.

> On appellera *aplatissement de rapport k*, la transformation qui, à tout point P du cercle, on fait correspondre un point M tel que HM = k.HP.

On construit alors point par point l'image du cercle de rayon OA.
En refaisant cette construction avec d'autres valeurs de k, nous obtenons toujours des lignes qui *ressemblent* beaucoup à l'ellipse du jardinier. Nous avons essayé avec k = 3/4, k = 2/3, k = 1/2, k =1/3, k =1/4. Nous remarquons, comme nous l'avions prévu, que la courbe obtenue est d'autant plus aplatie que k est petit. Mais elle passe évidemment toujours par A et A'.





<u>Comparaison des deux ellipses.</u>
On est alors en présence de deux courbes qui se ressemblent et qui ressemblent à la ligne de crête qui nous intrigue. Il faut chercher si ce sont deux ou bien une seule courbe.

- L'ellipse du jardinier est caractérisée par ses foyers.
- Le cercle aplati est caractérisé par le nombre k.

En revenant aux notations de la courbe du jardinier il faudra que : OB = k.OC ; **k= b/a** ou **b = a.k**
Or $OF^2 = a^2 - b^2$; $OF^2 = a^2 - a^2k^2$ ou encore $OF^2 = a^2(1-k^2)$ et comme k < 1, il y a deux points de (AA') qui répondent à cette condition ; on les appelle F et F'.
<u>Pour k = 1/ 3 et AA' = 12 cm,</u>

- on construit point par point le cercle aplati pour k = 1/3,
- l'ellipse du jardinier avec a = 6 et b = 6(1/3) = 2 soit OF = $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$,
- on superpose les deux constructions. Elles coïncident exactement !

On a refait ces constructions, toujours avec AA' = 12 cm (ou a = 6 cm) :
Si k = 3/4, il faut OF = 3 cm. Si k = 2/3, OF = $2\sqrt{3}$ cm.
Si k = 1/2, OF = $3\sqrt{2}$ cm. Si k =1/4, OF = $3\sqrt{3}$ cm.
A chaque fois, on construit les deux courbes, on les superpose et on vérifie qu'elles coïncident.
Nous dirons qu'il s'agit de la même courbe. Mais, reste la ligne de crête de notre cône vidé. Comment prouver que c'est cette même ellipse ?

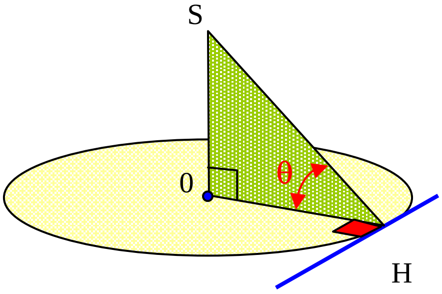
II-4- <u>Autres expériences : plusieurs trous sont pratiqués dans le plateau</u>

Nous nous sommes demandé ce que cela ferait si on perçait plusieurs orifices. Le résultat est très beau ! Nous avons juste observé : une ligne de crête se forme et elle est… assez complexe !

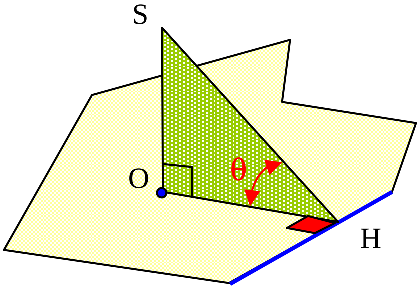
III- TAS à BASE IMPOSEE : POLYGONES

III-1- Carré, triangle, rectangle

Expériences, observations, réflexions, questions.
Le tas n'est plus « naturel » puisqu'il s'agit de verser le sable sur des pièces dont on a choisi la forme. On obtient le même résultat si on plonge la forme dans du sable et qu'on la sort en maintenant le socle bien horizontal. Le sable alors ne s'installe pas n'importe comment : il y a toujours la contrainte de l'angle de talus.



L'angle de talus θ dans le cas du cône



L'angle de talus θ dans le cas d'un polygone

Pour repérer cet angle θ on trace (on le tracera ainsi dans tout ce qui suit) un triangle rectangle SOH avec les conditions suivantes :

- S est le sommet du tas et O sa projection orthogonale sur la base (OS est donc la hauteur du tas),
- (OH) est perpendiculaire à la tangente en H, si la ligne est courbe,
- (OH) est perpendiculaire au côté si c'est un segment.
- De plus on rappelle que OS = OH.tanθ

Après un grand nombre d'essais avec des socles différents, nous retenons les formes de base qui nous semblent importantes et, après tous ces essais, nous avons choisi de commencer par les formes les plus simples qui permettent de comprendre ce qui se passe dans ces tas.

➢ Des formes simples : un carré, des triangles.

Nous pouvons observer que ce solide a un sommet, c'est donc une pyramide. Inutile d'observer plusieurs carrés, ils sont tous pareils à une échelle près.
Par la suite, nous avons observé le tas engendré avec une forme de base triangulaire.
Plusieurs essais sur des triangles rectangles, isocèles, équilatéraux et quelconques, nous montrent que tous les tas qui ont une base triangulaire forment eux aussi des pyramides.

➢ Le troisième cas simple : le rectangle.

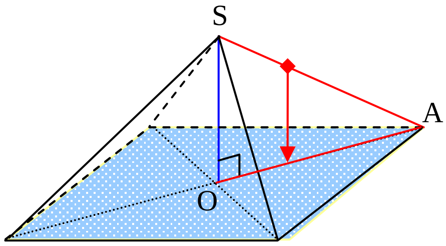
Cette fois ci, ce n'est plus une pyramide… Il y a une ligne de crête dont on sait évaluer la mesure.

Nous constatons, après ces trois essais, que nous avons deux familles de tas :

- Les pyramides (un sommet principal qui est le point de concours des arêtes autres que la base)
- Les non pyramides (une arête –que nous appelons arête faîtière car ça ressemble à un toit de maison- qui rejoint les points de concours des arêtes)

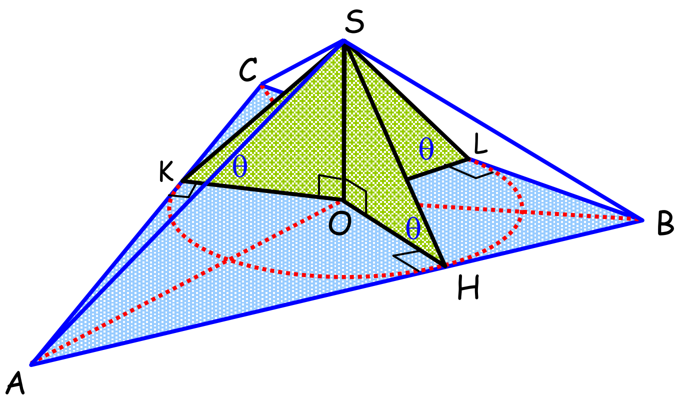
Question : Pourquoi avons-nous des pyramides pour un socle carré alors que pour un socle rectangulaire nous n'en avons pas ?

Analyse mathématique



Conjecture : Lors de nos premières observations, en particulier en regardant la pyramide faite avec une base carrée, nous avons émis l'hypothèse que les arêtes se projettent sur la base selon les bissectrices des angles.

Pour démontrer cette conjecture dans un cas plus général, plaçons-nous dans un triangle ABC quelconque.

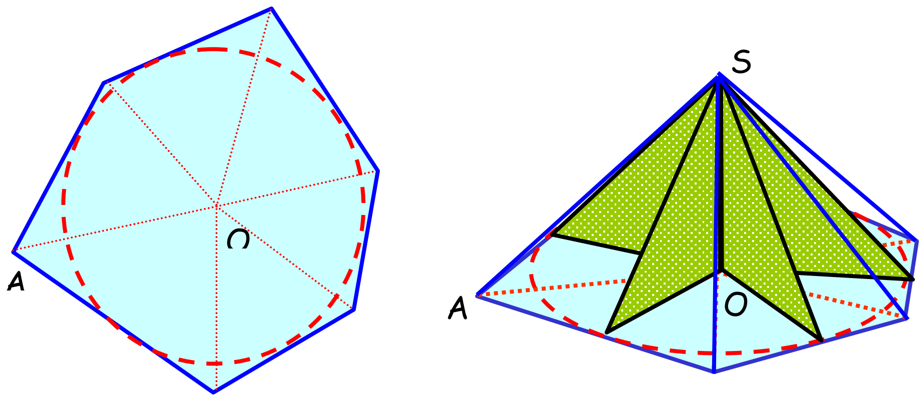


Les trois triangles SOL, SOK et SOH sont perpendiculaires aux côtés de la base. Ils ont donc l'angle de talus en H, K et L. Ces triangles ont un angle droit en O et un côté commun [SO]. Ils sont donc identiques. Donc OH = OK. Ce qui veut dire que O est sur la bissectrice de C. De même avec les distances OL et OK, ce qui démontre que O est le point de concours des bissectrices de la base, il est donc le centre du cercle inscrit à la base. [AS] se projette en [AO]. Donc notre conjoncture est vérifiée.

Généralisation. Nous savons que le centre du cercle inscrit dans un polygone est, quand il existe, le point de concours des bissectrices des angles du polygone. Nous pouvons ainsi affirmer que :

> **Lorsque le polygone de base admet un cercle inscrit (les bissectrices sont concourantes) le polyèdre de sable est une pyramide alors que, dans le cas contraire, ce n'est jamais une pyramide !**

Pour être certains d'obtenir un tas de sable pyramidal, il suffit de tracer un cercle puis un polygone dont les côtés sont tangents au cercle. On découpe ce polygone, on verse le sable, on obtient la pyramide.

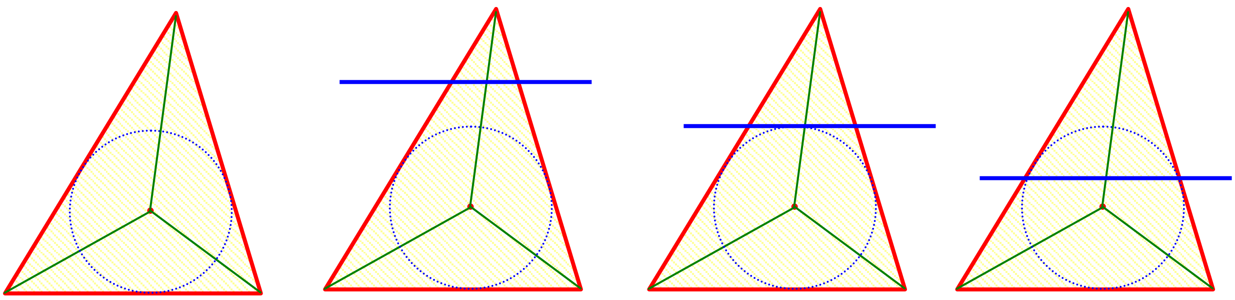


III-2- Trapèze

Avec ce qui a été démontré précédemment nous pouvons, à partir de n'importe quelle base polygonale convexe, prévoir sous forme de quel solide le sable va s'installer : il nous suffit de tracer les bissectrices des angles du polygone.
Intéressons-nous au cas du trapèze.

Préparation

Le trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles. Ici nous le ferons évoluer de la façon suivante : on part d'un triangle et on coupe parallèlement à un côté. Prenons d'abord 4 triangles superposables complets ; nous traçons les 4 cercles inscrits. Nous gardons le premier triangle en entier, Puis nous allons couper les trois autres triangles toujours de la même façon -parallèlement à un des cotés- mais à des endroits différents:



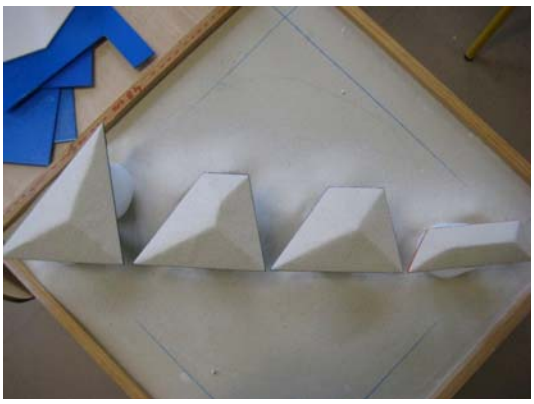
Situation 1 | Situation 2 | Situation 3 | Situation 4

Ce qu'on peut attendre :

- Situation 1 : cette situation est déjà rencontrée et développée. Tout triangle a un cercle inscrit, le tas sera une pyramide (un tétraèdre) dont le sommet se projette orthogonalement au point de concours des bissectrices du socle.
- Situation 2 : on a coupé avant le cercle inscrit on peut prévoir une arête faîtière.
- Situation 3 : on a coupé selon une tangente au cercle donc le trapèze a un cercle inscrit, on obtiendra une pyramide.
- Situation 4 : on a coupé après le cercle inscrit donc on doit obtenir une arête faîtière.

Expérimentation

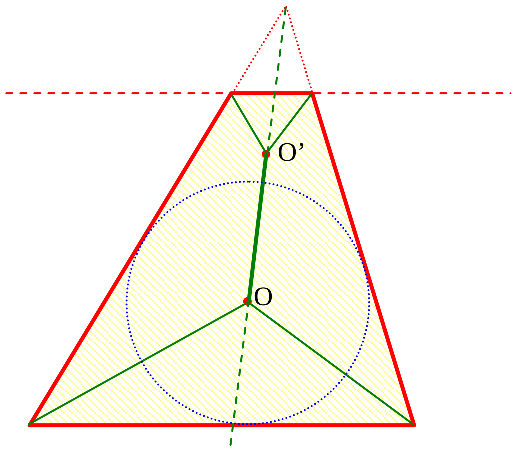
Les situations 1 et 3 sont sans surprise.
Mais pour les 2 et 4, il faut revenir au travail mathématique puisqu'il s'est produit quelque chose que nous n'avions pas prévu : l'orientation de l'arête faîtière.
Dans la situation 2, l'arête faîtière part du plus haut sommet et descend ; elle n'est pas parallèle à la base.
Dans la situation 4, l'arête faîtière est parallèle à la base. Cela ressemble au cas déjà étudié du socle rectangulaire. Et nous ne sommes finalement pas très étonnés puisqu'un rectangle est un cas particulier de ce trapèze que nous avons choisi.



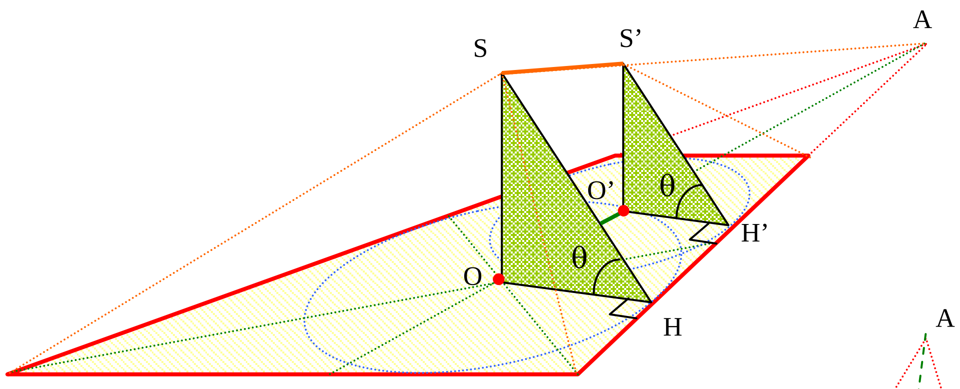
Retour à l'analyse mathématique :

- Situation 2

Nous avons tracé les quatre bissectrices des angles du socle. Comme prévu, elles ne sont pas concourantes. Les points O et O' sont les projetés des extrémités S et S' de l'arête faîtière.

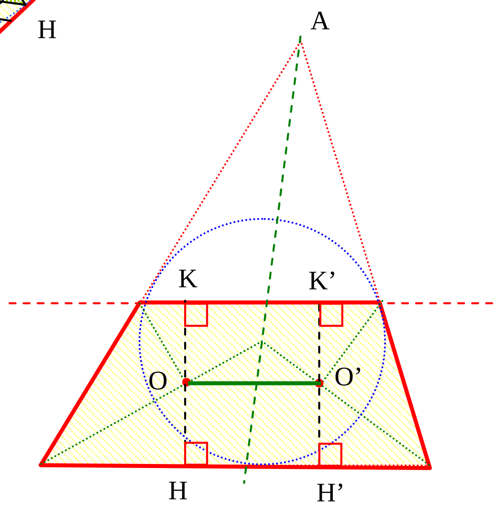


L'analyse du dessin en 3D sur lequel on a mis en évidence deux triangles rectangles HSO et H'S'O' qui ont un angle égal à l'angle de talus, nous trouvons :
$OS = OH \tan\theta$ et $O'S' = O'H' \tan\theta$ mais $OH < O'H'$ donc $OS < O'S'$ donc le segment [SS'] qui est l'arête faîtière *descend* comme nous l'avons constaté sur notre tas de sable.
De plus $OS - O'S' = (OH - O'H') \tan\theta$.
Si S' était en A, O'H' serait égal à 0 donc la pente de (SS') est la même que celle de (SA). Ce qui signifie que si nous prolongeons (SS') elle passe par le sommet A du triangle que nous avons coupé.



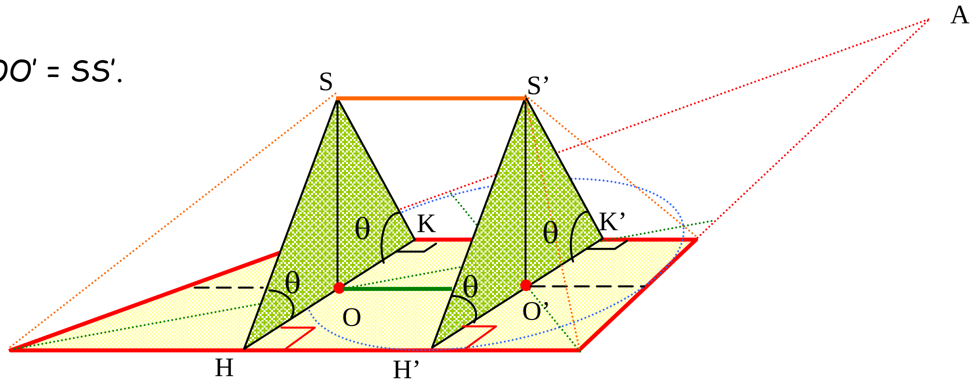
- Situation 4

Nous avons tracé encore les quatre bissectrices des angles du trapèze pour obtenir les points O et O', projetés sur le socle des sommets S et S'.

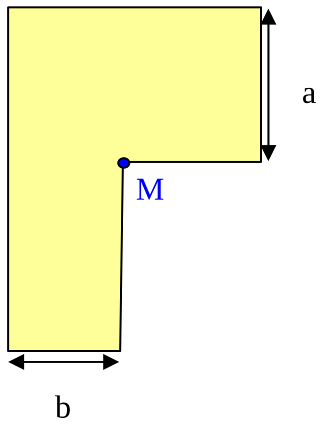


L'analyse du dessin en 3D sur lequel on a mis en évidence deux triangles isocèles HSO et H'S'O' qui ont deux fois l'angle de talus à leur base, nous trouvons :
$OS = OH \tan\theta$ et $O'S' = O'H' \tan\theta$ mais $OH = O'H'$ donc $OS = O'S'$
Donc (SS') // (HH') // (KK')
L'arête faîtière est parallèle au socle de base comme nous l'avons constaté sur notre tas de sable.

Et aussi : OO' = SS'.



III-3- Les polygones non convexes.



Expérimentation, réflexions, questions

Pour commencer l'étude des polygones non convexes, nous avons essayé de nombreuses formes « étranges » mais qui avaient toutes au moins un angle *rentrant*. Puis nous avons décidé d'étudier simplement un hexagone en forme de "L". En remarquant que les interrogations viendraient surtout de ce qui se passe au sommet M de l'angle rentrant.
Nous avons toujours découpé des L avec a = 12 cm et b ≤ 12 cm. Nous avons expérimenté successivement avec b= 12, b= 8, b= 6, b= 4, b= 3 et b= 1.

Première expérience : a = b
L'observation de dessus : le socle a un axe de symétrie et on note que le tas de sable présente un plan de symétrie. La ligne de crête est faite de deux segments et une courbe que nous ne savons nommer.
L'observation *à l'horizontale* est plus surprenante : il y a une bosse nettement visible là où la ligne de crête est courbe !

Autres essais : a > b
Nous faisons alors l'expérience avec les autres valeurs de b. Parfois il y a une bosse, parfois il n'y en a pas !

Les questions qui se posent alors sont :
- quelle est la nature de cette courbe qui se forme au niveau de l'angle rentrant ? Et quelle est la nature de sa projection sur le socle ? On pense à des quarts de cercles. Puis, en observant qu'en M se produit un écoulement, on pense aussi à l'ellipse…
- La bosse peut-elle se justifier géométriquement ?

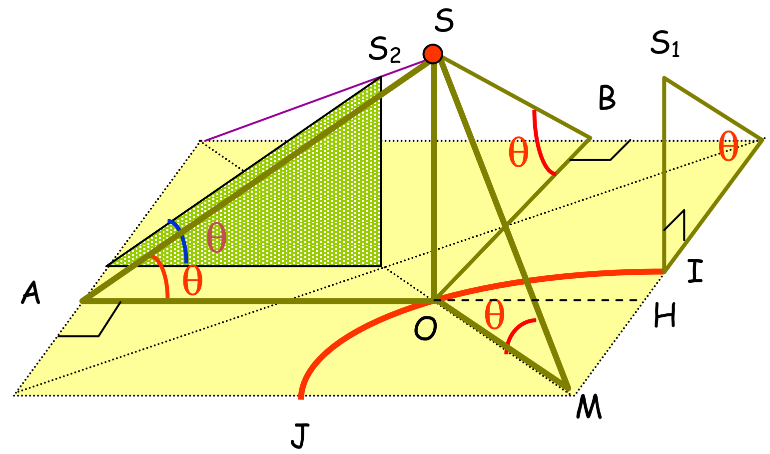
Recherche mathématique sur cette situation

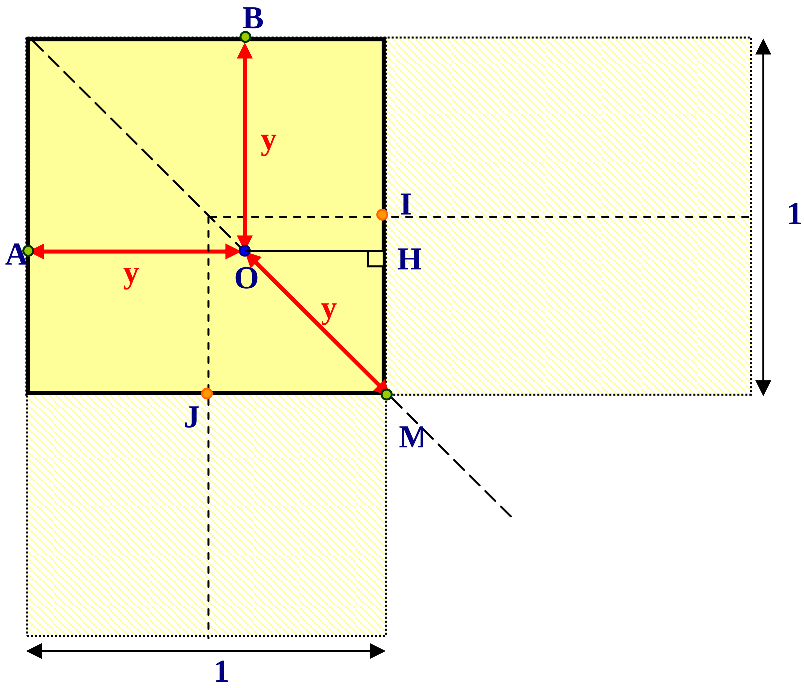
Notons d'abord que l'angle OMS est un angle de talus, il mesure θ.

Pour simplifier les calculs on choisit a comme unité de longueur. Soit : a = b = 1.

$MI = MJ = \frac{1}{2}$ $\quad IS_1 = \frac{1}{2}.\tan\theta$ qu'il faut comparer à OS. Or $OS = OM \tan\theta$.

Pour comparer I S_1 à O S, il faut comparer OM à $\frac{1}{2}$.





Calcul de OM.

Les trois triangles OMS, OBS et OAS sont identiques.

Posons OA = OM = OB = y

Dans le triangle OMH rectangle en H et isocèle : $y= (1-y).\sqrt{2}$

Soit $y = 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{2}$

Conclusion $OM > \frac{1}{2}$ donc $OS > IS_1$

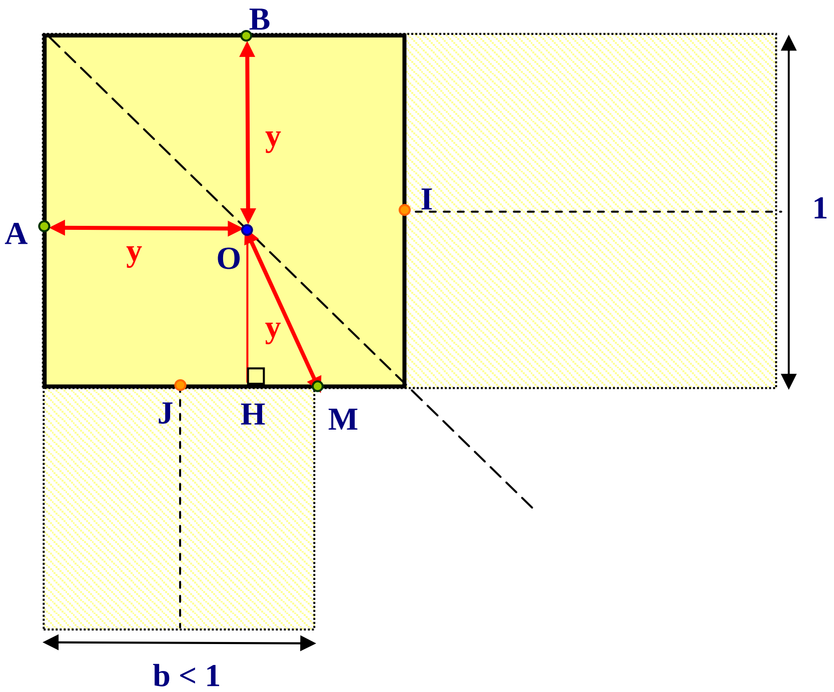
Ce qui prouve trois choses :

1) il y a bien une bosse en S qui se projette en O sur le socle,
2) $2 - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc O est plus près de M que le centre du carré,
3) $2 - \sqrt{2} > \frac{1}{2}$ donc la courbe qui va de I à J en passant par O n'est pas un quart de cercle.

A ce moment du travail nous savons seulement ce qu'elle n'est pas. Nous allons avoir l'occasion de découvrir sa nature quand nous aurons plus de moyens à notre disposition (voir IV- 3).

Tentative de généralisation

A ce moment du travail, nous pouvons chercher à prévoir ce qui va se passer pour les autres valeurs de b. En effet, on vient de trouver que tout dépend de la valeur de OM c'est-à-dire y. Pour b < 1 le point O est toujours sur la bissectrice du carré.



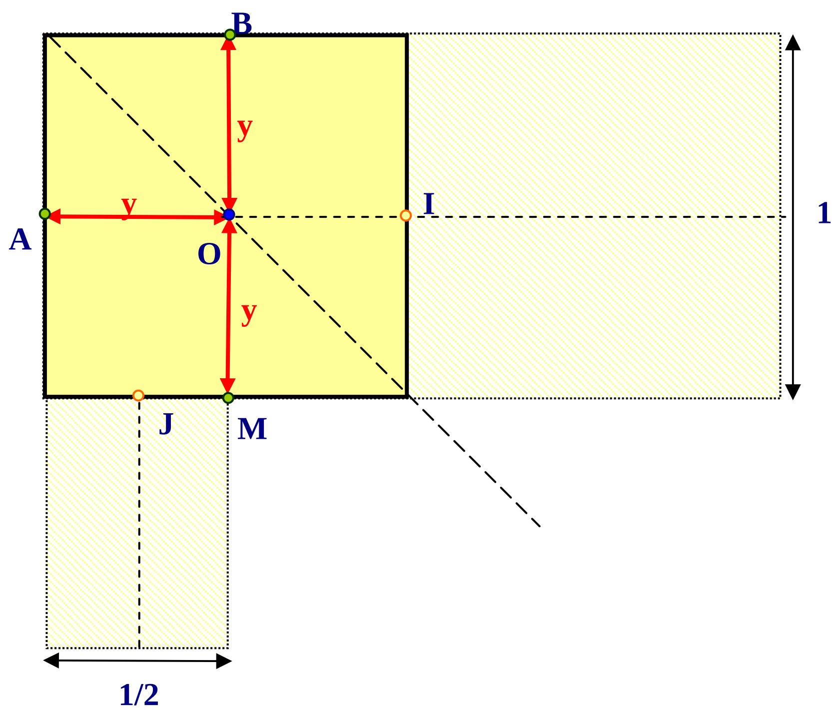
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OMH, il faudra donc résoudre l'équation :

$$y^2 = (1-y)^2 + (b-y)^2 \quad (1)$$

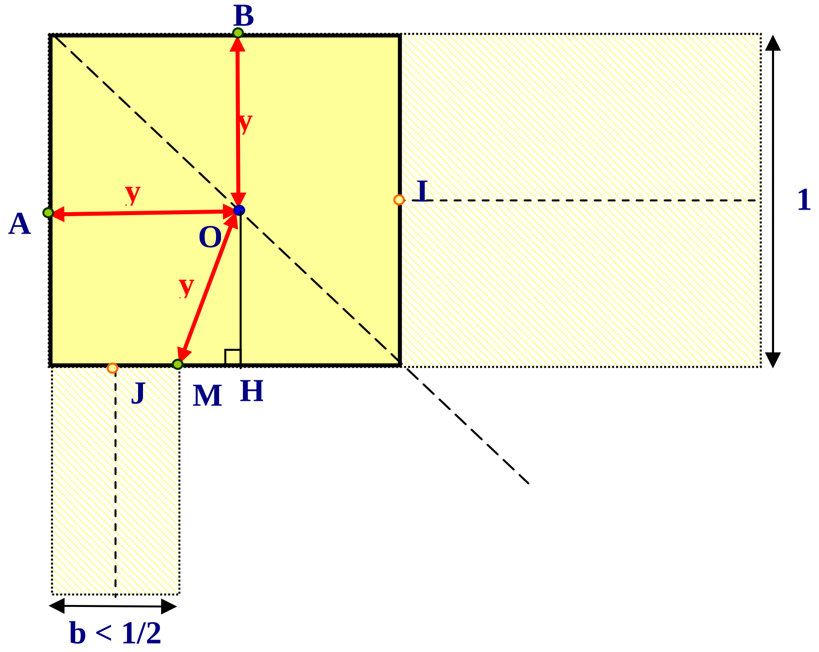
On a appris à résoudre les équations du second degré et nous avons fait ces résolutions pour les valeurs de b annoncées. A chaque fois, l'une des deux solutions est trop grande (supérieure à 1) donc refusée. L'autre valeur semble acceptable.

Si b = 3/4, l'équation devient $16y^2 - 56y + 25 = 0$. La solution est $y = \frac{7-\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}$ donc il doit y avoir une bosse.

Si b = 1/2, l'équation devient $4y^2 - 12y + 5 = 0$. La solution est $y = \frac{1}{2}$, il ne doit pas y avoir de bosse ! On remarque qu'on pouvait prévoir ce résultat en faisant le dessin du socle puisque M est sur (OB) !



Avec b = 1/3, l'équation devient $9y^2 - 24y + 10 = 0$ et a pour solution $y = \frac{4-\sqrt{6}}{3}$. Ce nombre est plus grand que $\frac{1}{2}$ donc il doit y avoir une bosse. Pourtant, en dessinant le socle, on note que le point M est « passé de l'autre côté de H ».. Nous reprenons nos calculs.



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OHM donne alors :

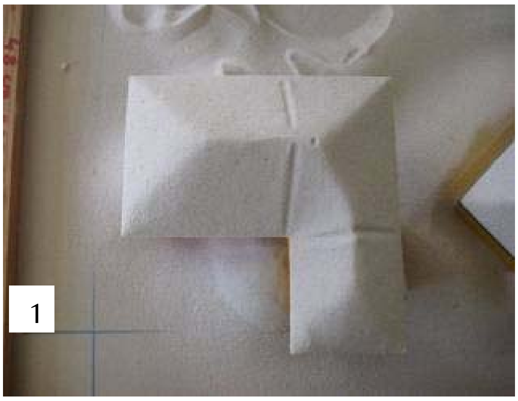
$$y^2 = (1-y)^2 + (y-b)^2 \quad (2)$$

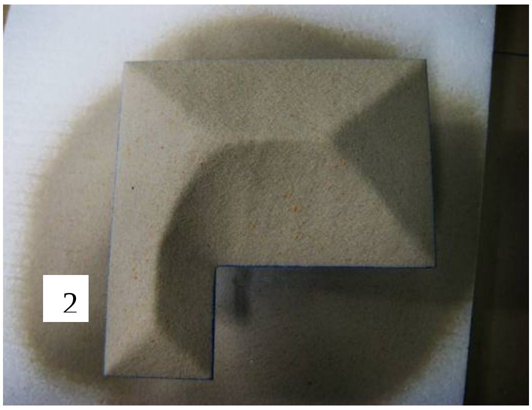
Ce qui est la même équation que (1). Nous pensons alors que notre valeur de y est correcte.
Nous avons voulu confirmer par une méthode géométrique pour construire O et nous avons trouvé que ce point *ainsi caractérisé* était constructible.

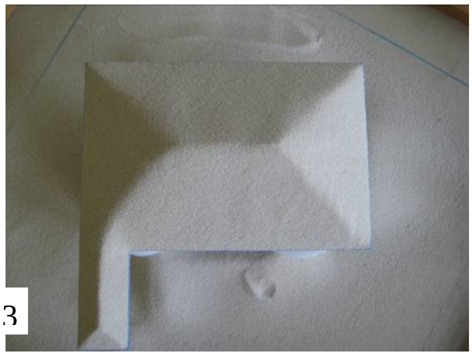
<u>Retour à l'expérimentation.</u>

Avec b = 3/4 nous avons prévu une bosse ; il y a une bosse. (photo 1)
Avec b = 1/2 il ne peut pas y en avoir ; il n'y a pas de bosse (photo 2)
Avec b = 1/3 nous avons trouvé qu'il doit y avoir une bosse et… il n'y en a pas !! (photo 3)

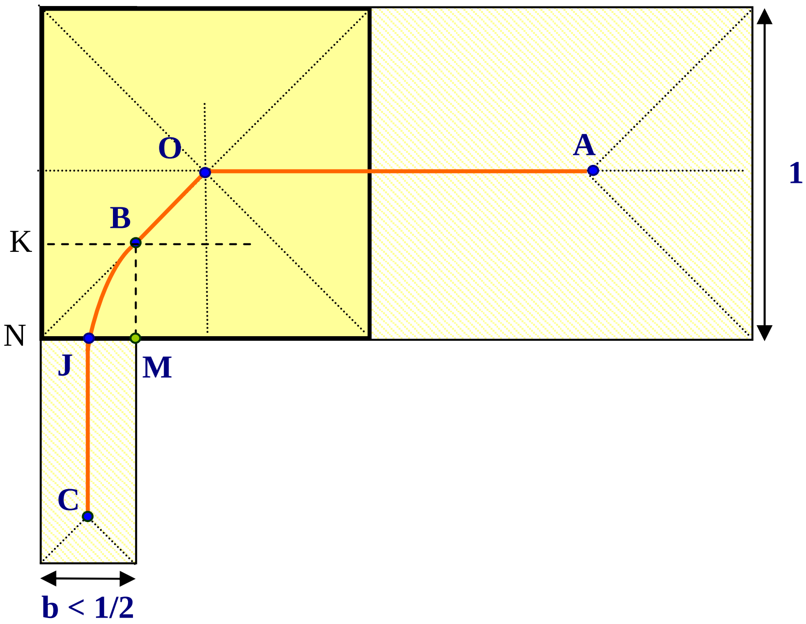
Que se passe-t-il ? Où est l'erreur de notre raisonnement ?







Cette fois encore, c'est l'observation du tas qui nous fait comprendre notre erreur : nous avions mal positionné l'angle de talus !
La projection de la ligne de crête sur le socle est mixtiligne : deux segments [AO] et [OB], une courbe de B à J et un segment [JC]. Plus tard nous avons pu trouver la nature de la ligne de B à J (voir IV-3).



<u>Position de B</u>, projeté du point où la ligne de crête change de forme. B est sur la bissectrice d'un angle du carré donc BK=BM=b. BN=b$\sqrt{2}$ et ON=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) donc OB= $(\frac{1}{2} - b)\sqrt{2}$. On peut aussi connaitre *l'altitude* h où se fait la transition : en M, on a l'angle de talus : h = b tanθ

Par exemple, si $b = \frac{1}{4}$ on trouve OB= $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})\sqrt{2}$ ou OB = $\frac{\sqrt{2}}{4}$ donc B est au milieu de ON (avec le théorème de la droite des milieux, on aurait dû prévoir !) ; l'altitude en B est la moitié de l'altitude en O et le double de l'altitude en J.

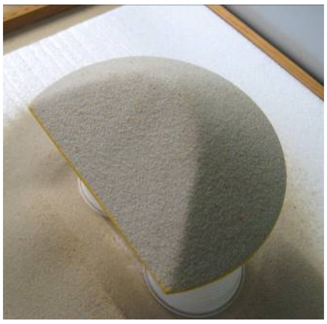
On a réussi à accorder la géométrie et l'expérience !

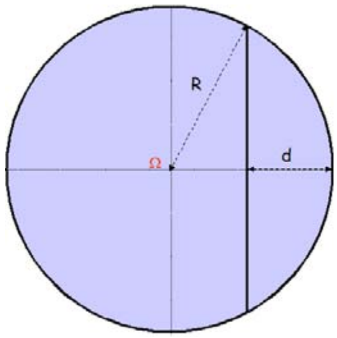
IV- TAS à BASE IMPOSEE : FRACTION de DISQUE

IV-1- Etude de cette nouvelle situation

Expérimentation

Prenons un disque de centre O et de rayon R, coupons-le selon une corde. On note R-d la distance entre O et la corde. Comme dans les expériences précédentes nous maintenons ce socle horizontal et nous versons le sable. Observons. Nous obtenons d'un côté une pente semblable à celle du cône. De l'autre côté nous voyons une ligne de crête courbe ; nos professeurs l'ont appelée parabole. Mais nous nous sommes dit que ça ressemblait beaucoup à une portion de cercle ou à une partie de la ligne de crête obtenue lors de l'écoulement de sable (cas du trou décentré). Nous avions besoin de les différencier et Dominique Bénard nous a suggéré de découvrir les équations de courbes.



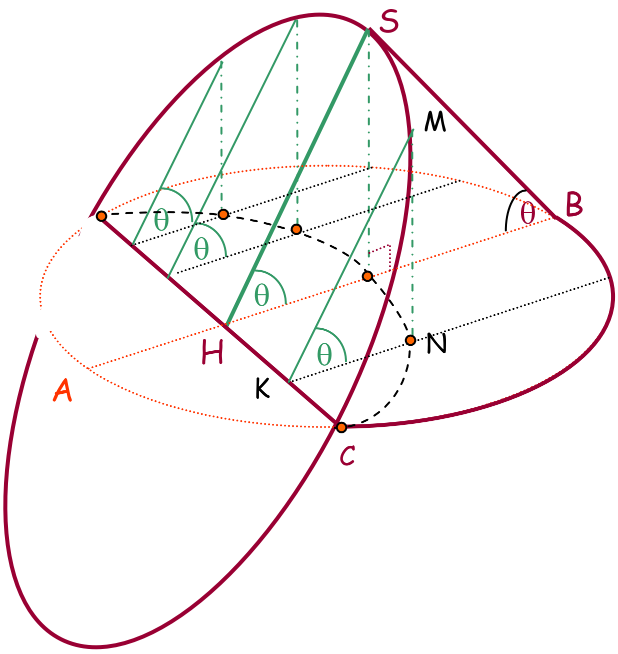


Dans cette expérience le seul paramètre modifiable est la valeur de d, entre 0 et 2R. La ligne de crête semble conserver la même forme et la surface limitée par cette ligne et le bord du socle semble plane.

Première tentative d'analyse géométrique du tas obtenu avec un disque coupé

Comme pour les tas précédents, l'angle de talus va nous éclairer.

M étant un point quelconque sur la ligne de crête. K est le pied de la perpendiculaire à (HC) passant par M et N est le projeté orthogonal de M sur le socle. Tous les triangles MNK sont rectangles et ont l'angle de talus. Ils sont tous semblables (à une échelle près) et toutes les droites (KM) sont parallèles.



Ce qui démontre que la ligne de crête est plane et le plan qui la contient, contient aussi la corde de coupe. Cette ligne de crête est bien l'intersection d'un cône et d'un plan : c'est une conique. Mais quel type de conique ? Un cercle ? Une ellipse ? Ou autre chose que nos professeurs appellent parabole (voir II-3).

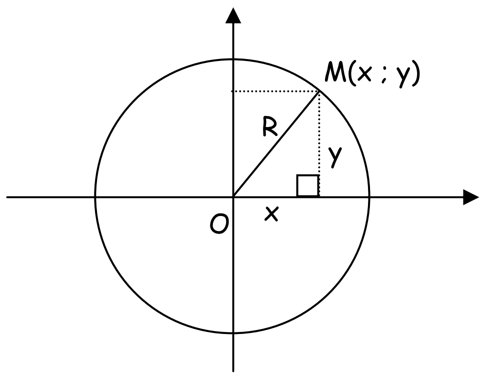
Pour répondre à nos questions, Dominique Bénard nous a suggéré de travailler sur l'équation de cette courbe. Il nous faut d'abord apprendre ce qu'on appelle *équation d'une courbe.*

IV-2- Equation de courbe

Définition. Une équation de courbe c'est tout simplement une condition pour qu'un point appartienne à cette courbe.
Il faut que la courbe soit tracée dans un repère.
Dans un repère un point est caractérisé par deux nombres qu'on appelle ses coordonnées et que l'on note (x ; y). L'équation de la courbe est la relation que doivent vérifier les deux nombres x et y pour que M soit un point de la courbe. Si la relation n'est pas vérifiée, M ne sera pas sur la courbe.

Exemple 1 : équation d'un cercle

On choisit un cercle de centre O origine du repère
Il est simple de prouver que M(x ; y) sera sur le cercle de centre O et de rayon R à condition que OM = R ou encore $OM^2 = R^2$ mais $OM^2 = x^2 + y^2$
donc l'équation de ce cercle est : $x^2 + y^2 = R^2$



Exemple 2 : équation d'une ellipse

L'autre courbe que nous avons rencontrée est l'ellipse du jardinier ou cercle aplati (voir II-3).
Nous savons comment passer du cercle à l'ellipse et nous avons l'équation du cercle ; nous pouvons donc trouver l'équation de l'ellipse où OB=b ; OA=a .
Si M(x;y') est sur le cercle (de rayon a) et si P (x ; y) est sur l'ellipse c'est que y = ky' ou encore y' = y/k mais k = b/a donc y' = ay/b.
La condition pour que M soit sur le cercle est que :

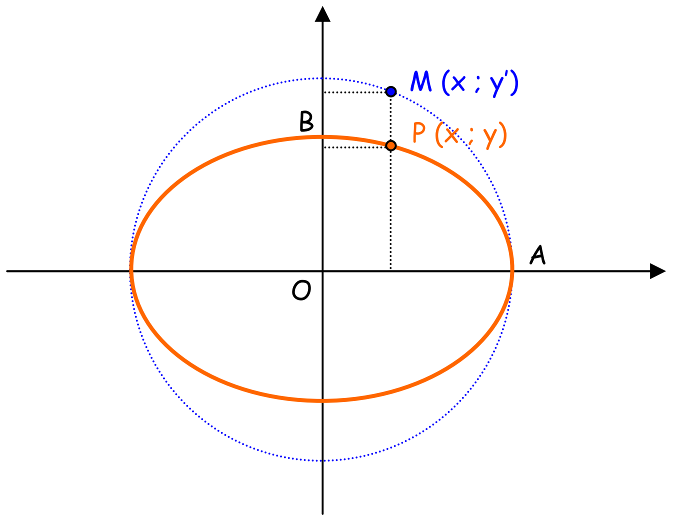
$$x^2 + y'^2 = a^2$$

donc la condition pour que P soit sur l'ellipse est que :

$$x^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} = a^2$$

et, en divisant par a^2,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



C'est l'équation de cette ellipse.
Et, quand on trouvera cette équation, on pourra reconnaitre une ellipse.

Recherche d'une équation pour notre ligne de crête

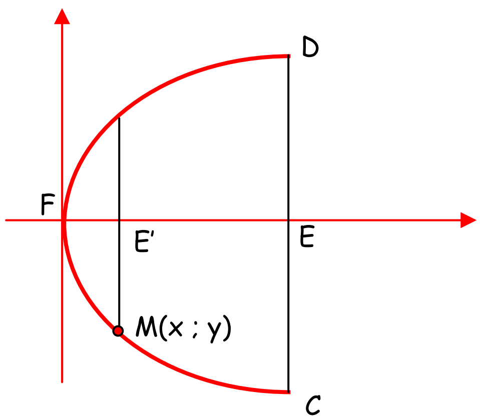
On cherche à trouver l'équation de la ligne de crête observée sur le tas de sable dont le socle est une fraction de disque. Nous avons remarqué que cette ligne ressemble à une partie de cercle ou à une partie d'ellipse. Si on connaissait son équation on pourrait les comparer.

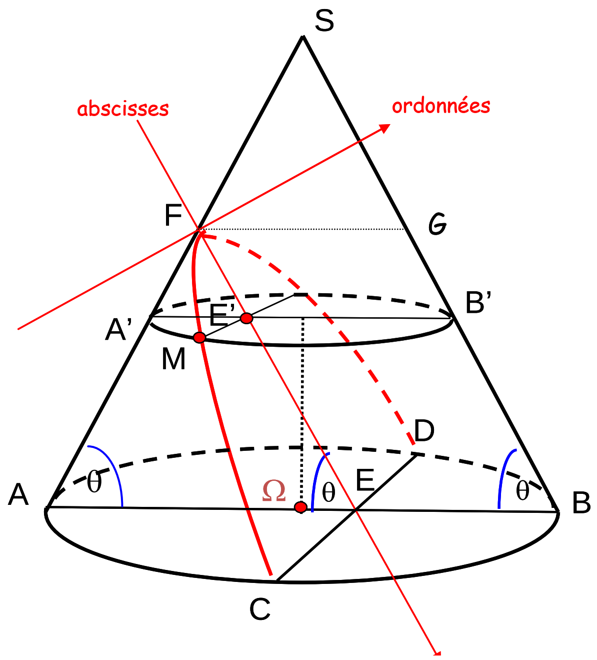
NB : *Nous avons beaucoup cherché avec l'aide de nos professeurs ; il faut travailler dans quatre plans différents et nous avions beaucoup d'équations. Finalement nous avons « trié » pour simplifier au maximum ce qui est la méthode d'Apollonius revue par Galilée (d'après notre chercheur).*

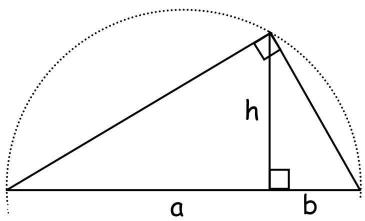
Choix du repère

- l'origine est en F, sommet du tas,
- l'axe des abscisses est (FE),
- l'axe des ordonnées est la perpendiculaire en F à (FE) dans le plan qui contient D, F et C.

Dans ce repère M(x ; y) est un point quelconque de la courbe.
On trace le cercle passant par M et parallèle au socle de base.
On voit sur le schéma les autres points ; l'angle de talus a été agrandi pour mieux voir.
On remarque que (ME') $\perp$ (A'B') et (CE) $\perp$ (AB)







Nous cherchons une condition pour que M soit sur la ligne de crête.
Nous avons besoin d'une propriété, démontrée par Euclide (quadrature du rectangle - voir annexe) qui dit que, dans un triangle rectangle :

$$h^2 = ab$$

On l'applique dans le cercle de diamètre [A'B'] :

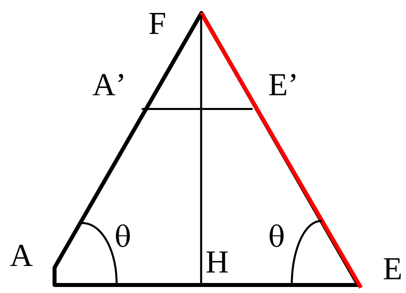
$$ME'^2 = A'E' \times E'B'$$

Et dans le cercle de diamètre [AB] :

$$CE^2 = EA \times EB$$

Mais E'B'BE est un parallélogramme donc E'B' = EB

Donc $\dfrac{ME'^2}{CE^2} = \dfrac{A'E' \times E'B'}{EA \times EB} = \dfrac{A'E'}{AE}$ (1)



Dans le triangle isocèle FAE on applique le théorème de Thalès : (A'E') // (AE) donc $\frac{A'E'}{AE} = \frac{FE'}{FE}$

En reportant dans (1) : $\frac{ME'^2}{CE^2} = \frac{FE'}{FE}$ or FE' = x et $FE = \frac{HE}{\cos\theta} = \frac{AE}{2\cos\theta} = \frac{2R-d}{2\cos\theta}$

Finalement : $\frac{y^2}{d(2R-d)} = \frac{x(2\cos\theta)}{2R-d}$ soit $\frac{y^2}{d} = x(2\cos\theta)$ (3)

$y^2 = (2d\cos\theta)\,x$ ou $y^2 = k\,x$; ce qui est l'équation de notre courbe.

Bilan

On a rencontré 3 coniques avec 3 sortes d'équations différentes :

Le cercle : $x^2 + y^2 = R^2$

L'ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Notre courbe : $y^2 = k\,x$.

Notre courbe n'est donc ni une ellipse ni un cercle mais c'est une troisième conique : une parabole.

IV-3- Applications : retour sur des questions restées sans réponses.

Dans le paragraphe III-3 nous nous demandions quelle était la nature de l'arc entre I et J dans la situation 1 où les deux parties ont la même largeur. On a seulement prouvé que cet arc n'est pas un quart de cercle. En recherchant son équation on tente de trouver sa nature.

La condition pour que P(x ;y) soit sur la courbe entre O et J est que PM = PH

Ou encore $MP^2 = PH^2$

$MP^2 = y^2 + (1/2 - x)^2$

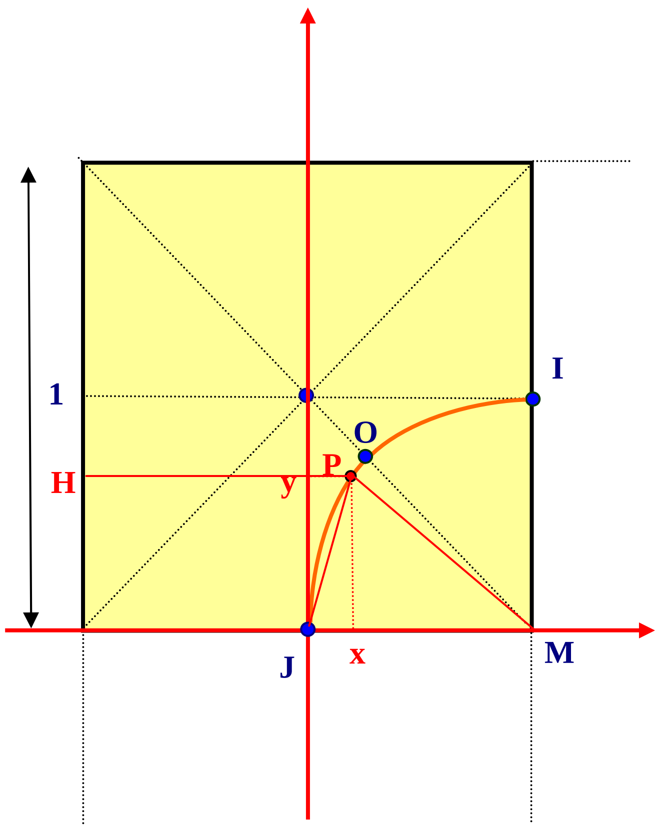
$PH^2 = (1/2 + x)^2$

La condition devient :

$y^2 + (1/2 - x)^2 = (1/2 + x)^2$

L'équation de la courbe entre O et J est donc $y^2 = 2x$; on reconnait l'équation d'une parabole.

Entre I et O les conditions ne sont pas les mêmes mais la droite (OM) est un axe de symétrie la courbe sera la même.



Conclusion : entre I et J la projection de l'arête faîtière est faite de deux arcs de paraboles.

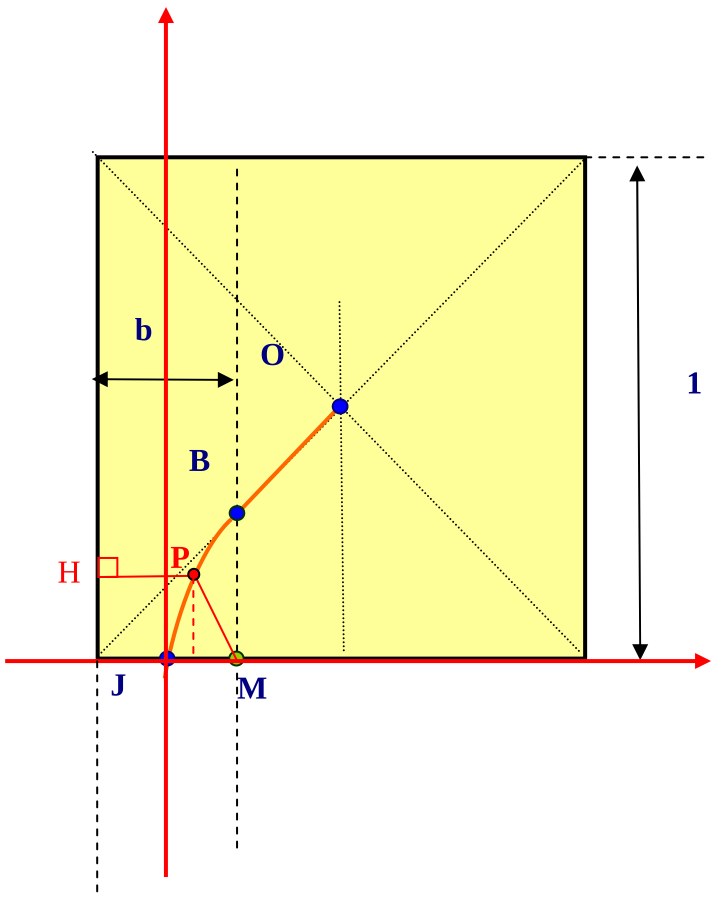
Remarque : On peut penser que la ligne de crête est aussi deux morceaux de paraboles mais on ne sait pas. Il faudrait encore chercher !

Dans le paragraphe III-3 encore on n'a pas trouvé la nature de l'arc entre I et J dans la situation 4 où b est plus petit que 1/2. On va chercher l'équation de l'arc entre B et J (projeté de la ligne de crête).

On fait le choix du repère, et on cherche une condition pour que un point P (x ; y) soit sur cette courbe.
Au dessus des segments [PH] et [PM] il y a l'angle de talus donc PH = PM
PH = $b/2 + x$
$PM^2 = y^2 + (b/2 - x)^2$
En résumé, P est sur la courbe si :
$y^2 + (b/2 - x)^2 = (b/2 + x)^2$
ou $y^2 = 2b\,x$; on reconnait l'équation d'une parabole.

Conclusion : entre B et J, le projeté de la ligne de crête est un arc de parabole.

Remarque : On peut penser que la ligne de crête est aussi un morceau de parabole mais on ne sait pas. Il faudrait encore chercher !



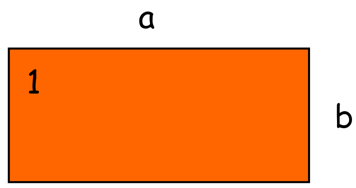
V- CONCLUSION

Ce travail nous a occupés pendant deux années scolaires et il n'est pas fini. Il ne sera jamais fini. Nous avons aussi appris cela en jouant les « mathématiciens chercheurs » ! Les maths ont une histoire. Cette histoire a commencé il y a très longtemps : on a « croisé » des Grecs anciens, Apollonius, Thalès et Pythagore, Euclide. Plus près de nous on a évoqué Galilée. Et puis on a rencontré un chercheur *vivant* qui nous a parlé de la recherche aujourd'hui : les mathématiques avancent encore.
On a bricolé nos tas de sable, c'était plutôt agréable. Et puis on s'est mis à faire des math sans trop de douleur mais en y passant beaucoup de temps, emportés par la curiosité. La confrontation entre théorie et expérience n'est pas si courante en mathématiques, c'est une des richesses de ce sujet.

Annexe

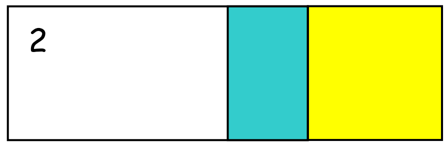
Quadrature du rectangle selon Euclide

L'objectif est de construire un carré qui a la même aire qu'un rectangle donné. Sans faire aucune mesure.

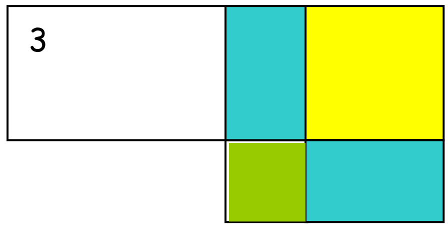


Première partie : Construire un « gnomon » de même aire que le rectangle orange

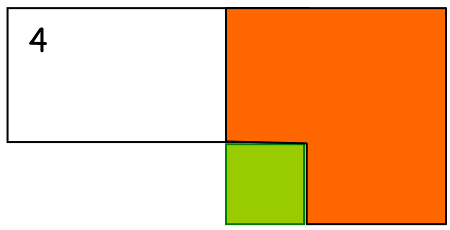
1) On juxtapose au rectangle un carré (jaune) de côté b. On obtient un rectangle dont les côtés sont b et a+b.
2) On le partage en deux rectangles égaux donc l'aire orange est faite de deux aires bleues et une aire jaune.



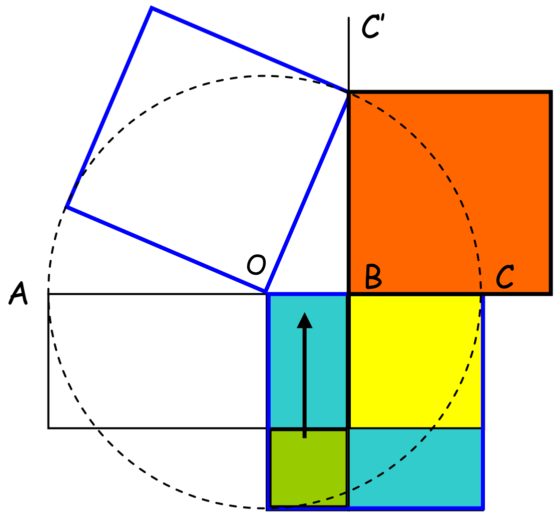
3) On trace le carré sous le demi-rectangle. Il est constitué de quatre pièces : le carré jaune, deux rectangles bleus (on démontre que ces deux rectangles sont de même aire) et un petit carré vert.



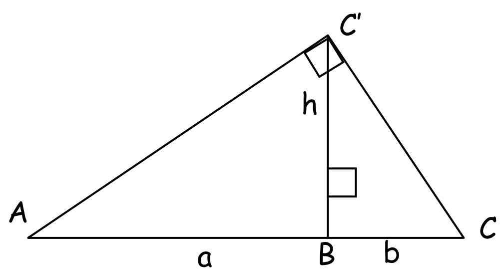
4) On appelle « gnomon » (*grec : ce qui fait connaître*) l'hexagone orange formé des trois pièces, bleues et jaune. Ce gnomon a donc la même aire que le rectangle orange.



Partie deux : On trouve dans le livre d'Euclide « Les Eléments » une démonstration du théorème de Pythagore. Il utilise ce théorème pour terminer la quadrature. Il reste en effet à trouver un carré de même aire que le gnomon.



On prolonge le petit côté du rectangle orange jusqu'à son intersection C' avec le cercle de centre O et de rayon (a+b)/2. On fait tourner le grand carré autour de O jusqu'à C' ; le triangle OBC' est rectangle en B. On construit le carré orange de côté [BC'] et on remarque que le petit carré vert a pour côté OB. D'après le théorème de Pythagore, (4) le carré de côté [OC'] moins le carré vert égale le carré orange : le carré orange a la même aire que le rectangle orange.
CQFD nous dit Euclide !



Application

L'aire du rectangle est *A* = ab l'aire du carré est BC'^2
donc $BC'^2=ab$.
Mais ACC' est rectangle en C'. Ce qui démontre que, dans un triangle rectangle, $h^2=a\,b$.
C'est ce que nous avons utilisé dans IV-2 (équation de notre ligne de crête)

Autres définitions et théorèmes utilisés pour nos recherches

Polygone : figure plane qui a plusieurs (*poly*) angles (*gone* en grec). On remplace *poly* par un préfixe tel que *tri* (3), *tétra* (4), *penta* (5), *hexa* (6) etc. Ainsi un hexagone est un polygone à 6 angles donc à 6 côtés.

Polyèdre : solide (3D) qui a plusieurs faces.

Pyramide : polyèdre dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des triangles.

Tétraèdre : pyramide à quatre faces. Ses faces sont donc toutes triangulaires.

Théorèmes de la droite des milieux (cas particulier du théorème de Thalès):

- dans un triangle la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.
- dans un triangle, la droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un autre côté passe aussi par le milieu du troisième côté.

Théorème de Thalès : « Si on mène une droite parallèle à un côté d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle » (*Euclide. Les Eléments. Sixième livre. Proposition II. Traduction F.Peyrard*)

Théorème de Pythagore : « Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés contenant l'angle droit » (*Euclide. Les Eléments. Livre premier. Proposition 47. Traduction B.Vitrac*).

Bissectrice d'un angle (ou l'axe de symétrie de l'angle) : C'est la droite formée de tous les points équidistants des deux côtés de l'angle.

Cercle inscrit dans un polygone : C'est le cercle (s'il existe) qui est tangent à chacun des côtés du polygone.

Théorème des bissectrices des angles d'un triangle : dans un triangle les bissectrices des trois angles sont concourantes et leur point d'intersection est centre du cercle inscrit dans le triangle.

Notes d'édition

(1) A désigne l'aire du triangle représenté en vert sur la figure

(2) La diagonale d'un carré de côté x est de longueur $x\sqrt{2}$

(3) On rappelle que ME' = y (par le choix du repère). De plus, AE = 2R-d, (cf dessin du disque en début de paragraphe IV.1). Enfin, par le théorème de Pythagore, on a la relation :

$$\mathrm{CE}^2 = \Omega\mathrm{C}^2 - \Omega\mathrm{E}^2 = \mathrm{R}^2 - (\mathrm{R}-\mathrm{d})^2 = \mathrm{d}(2\mathrm{R}-\mathrm{d})$$

(4) On a en effet, $\mathrm{BC}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$