La stratégie des allumettes

par

Alexandre MOTHE, Laurent ORBAN, Elodie PRIVAT,
Sylvain ROCHER, Laurent THOUY
élèves du Lycée Pape Clément à Péssac

Jumelage MATh.en.JEANS, année scolaire 2004-2005 entre les Lycées Fernand Daguin à Mérignac (Gironde) et Pape Clément à Pessac (Gironde)
Enseignants: Bernard PRIVAT , Catherine RANSON (L. Pape Clément) & Yves SERRAT (L. Fernand Daguin)
Chercheur: Eric SOPENA (LaBRI, Université Bordeaux I TALENCE)

[Article vérifié et annoté : les passages entre crochets sont des éditeurs]

RÉSUMÉ (par les éditeurs). A tour de rôle deux joueurs prélèvent des allumettes dans un tas allumettes. Le premier à jouer peut en retirer 1 ou 2, et par la suite chaque joueur peut en retirer entre 1 et $kn+q$ où k et q sont des entiers fixés et où n est le nombre d'allumettes retirées par l'advesrsaire au coup précédent. Le perdant est celui qui prélève la dernière allumette. Pour k=2 et q=0, les auteurs déterminent les positions gagnantes du jeu et donnent une stratégie infaillible, à l'aide de la suite de Fibonacci. Des conjectures générales sont proposées pour k>2, q=0 et pour k=1, q=1.

MOTS CLEFS : STRATÉGIE JEU ALLUMETTE DOUBLE FIBONACCI DÉCOMPOSITION PROGRAMME RÉCURSIF

SOMMAIRE

Introduction

Il existe de nombreux jeux d'allumettes et celui qui nous intéresse est le suivant :

- Deux joueurs disposent d'un tas de 50 allumettes et retirent à tour de rôle un certain nombre d'allumettes.
- Le premier joueur peut retirer **une** ou **deux** allumettes.
- Lorsqu'un joueur a retiré n allumettes [au coup précédent], son adversaire peut en retirer au maximum $2n$ [et il doit en retirer au moins une].
- Le joueur qui doit retirer la dernière allumette est déclaré perdant.

Problème posé : existe-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ? pour le second ? Et si oui laquelle ?

A. Avec un tas de 50 allumettes

A.I. Approche du problème

Illustration :

Tas [initial : 50 allumettes]. Coups successifs :
Le joueur [n°1] peut en retirer 1 ou 2. Il en retire 2.
Le joueur [n°2] peut en retirer jusqu'à 4. Il en retire 3.
Le joueur [n°1] peut en retirer jusqu'à 6. Il en retire 1.
Le joueur [n°2] peut en retirer jusqu'à 2.
Et ainsi de suite.

Couples [définition]

Nous avons modélisé toutes les situations possibles de jeu par des couples (a,n) où " a " est le nombre d'allumettes restantes et " n " le nombre d'allumettes retirées au coup précédent. Une partie est alors modélisée par une suite de couples.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent et en utilisant les couples, nous obtenons :
(50,1) (48,2) (45,3) (44,1) etc.…

Les positions gagnantes [définitions]

[Positions perdantes et gagnantes sont définies de la manière suivante.]

- Une position est gagnante s'il existe un coup qui envoie l'adversaire dans une position perdante.
- Une position est perdante si tous les coups envoient l'adversaire dans une position gagnante.
- Toutes les positions $(1,n)$ sont perdantes: en effet le tas en question ne contient qu'une seule allumette, le joueur qui doit jouer a donc perdu.

[NDLR : Les définitions précédentes sont indirectes et présentent apparemment un cercle vicieux. En fait il n'en est rien: les règles données permettent bien de déterminer les positions gagnantes et les positions perdantes *de proche en proche* à partir de positions perdantes "ultimes" (celles de la forme $(1,n)$), qui, elles, sont définies directement. Un tel procédé de définition est appelé *définition récursive*]

<u>Liste des positions gagnantes jusqu’à 50 allumettes</u>

Nous avons établi à la main la liste des positions gagnantes jusqu’à 50 allumettes.

	(On a naturellement établi cette liste en commençant par le bas !)
Si un couple (a,n) est gagnant, tous les couples de la forme (a,n') avec $n' > n$ sont gagnants car on pourra toujours retirer le nombre d'allumettes nécessaire pour gagner. Ainsi, pour chaque valeur de a, nous cherchons à déterminer le plus petit n pour lequel le couple (a,n) est gagnant. Nous noterons : **(a,n)Gi** le fait que le couple (a,n) est gagnant et qu'il faut retirer i allumette(s) pour gagner ; et **(a,n)P** le fait que (a,n) est perdant. *Exemples* [*de raisonnement.* On a (4,1)P car (3,1) et (2,2) sont gagnantes : (3,1)G2 et (2,2)G1.] On a (4,2)G3 donc (4,3)G3 (4,4)G3 …	**(50,1)G2** **(49,1)G1** (48,1)P (48,2)P (48,3)P (48,4)P (48,5)P (48.6)P… **(48,7)G13** **(47,1)G1**(46,1)P **(46,2)G3** **(45,1)G2** **(44,1)G1** (43,1)P (43,2)P (43,3)P… **(43,4)G8** **(42,1)G2** **(41,1)G1** (40,1)P (40,2)P… **(40,3)G5** **(39,1)G1**(38,1)P **(38,2)G3** **(37,1)G2** **(36,1)G1** (35,1)P (35,2)P (35,3)P (35,4)P (35,5)P (35,6)P (35,7)P (35,8) P (35,9) P(35,10)P…**(35,17)G34** **(34,1)G1** (33,1)P … **(33,2)G3** **(32,1)G2** **(31,1)G1** (30,1)P (30,2)P (30,3)P … **(30,4)G8** **(29,1)G2** **(28,1)G1** (27,1)P (27,2)P … **(27,3)G5** **(26,1)G1** (25,1)P … **(25,2)G3** **(24,1)G2** **(23,1)G1** (22,1)P (22,2)P (22,3)P (22,4)P (22,5)P (22,6)P (22,7)P (22,8)P (22,9)P (22,10)P **… (22,11)G21** **(21,1)G2** **(20,1)G1** (19,1)P (19,2)P … **(19,3)G5** **(18,1)G1** (17,1)P **(17,2)G3** **(16,1)G2** **(15,1)G1** (14,1)P (14,2)P (14,3)P (14,4)P (14,5)P (14,6)P **(14,7)G13** **(13,1)G1** (12,1)P … **(12,2)G3** **(11,1)G2** **(10,1)G1** (9,1)P (9,2)P (9,3)P … **(9,4)G8** **(8,1)G2** **(7,1)G1** (6,1)P (6,2)P … **(6,3)G5** **(5,1)G1** (4,1)P … **(4,2)G3** **(3,1)G2** **(2,1)G1** $(1,n)$P

A.II. Observations des résultats et premières conjectures

Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci F_n est définie par :

$F_1=1$
$F_2=2$
et pour tout entier $n > 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Les premiers termes de la suite sont donc :
$F_3=3$
$F_4=5$
$F_5=8$
$F_6=13$
$F_7=21$
etc…

Nous nous sommes intéressés au nombre d'allumette(s) à retirer pour chaque position gagnante. Nous avons remarqué que tous les nombres de cette liste sont des nombres de la suite de Fibonacci.

Voici les nombres d'allumettes [successifs] à retirer, [si on le peut,] pour gagner jusqu'à 55 allumettes (qui est le premier nombre de la suite de Fibonacci supérieur ou égal à 50).

1 2 3 1 **5** 1 2 **8** 1 2 3 1 **13** 1 2 3 1 5 1 2 **21** 1 2 3 1 5 1 2 8 1 2 3 1 **34** 1 2 3 1 5 1 2 8 1 2 3 1 13 1 2 3 1 5 1 2 **55 …**

[On appellera cette suite ***la suite gagnante :*** *le k-ième terme de la suite gagnante est le nombre d'allumettes qu'il faut pouvoir retirer d'un tas de k+1 allumettes afin d'obtenir une position perdante*]

Obtention de la suite gagnante

La question est maintenant de savoir comment construire la suite des nombres d'allumettes à retirer.

- On commence tout d'abord par écrire les premiers nombres de la suite de Fibonacci :
  1 2 3 5 8 13 21 34 …
- Puis, lorsqu'un nombre [de cette suite], A, est supérieur ou égal à 3, on calcule […] le quotient entier du nombre A divisé par 2 ([ce qui est noté] *A* div 2 = *Q*) et on.inscrit [en intercalant] à la suite de A [les *Q* premiers] termes de la suite que l'on est en train de construire.

1 2 **3** *1* **5**	(3 div 2 = 1 , on insère 1 nombre de la suite)
1 2 **3** 1 **5** *1 2* **8**	(5 div 2 = 2 , on insère 2 nombres de la suite)
1 2 **3** 1 **5** 1 2 **8** *1 2 3 1* **13**	(8 div 2 = 4 , on insère 4 nombres de la suite)
1 2 **3** 1 **5** 1 2 **8** 1 2 3 1 **13** *1 2 3 1 5 1 2* **21**	(13 div 2 = 6 , on insère 6 nombres de la suite) et (5 div 2 = 2 , on insère 2 nombres de la suite)
etc.	

[**NDLR** - Un "graphique" donnant "Le nombre d 'allumettes à retirer pour gagner, en fonction du nombre d 'allumettes restantes" a été réalisé par les auteurs : leur "tableau" figurait "en abscisse le nombre d'allumettes restantes dans le tas et en ordonnée le nombre d'allumettes à retirer pour gagner". Ce graphique ne nous est malheureusement pas parvenu.]

A.III. Justifications

Voici pour mémoire la liste des premiers termes de la suite de Fibonacci qu'on a appelés plus simplement nombres de Fibonacci :

1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 …

On a observé que chaque nombre entier pouvait s'écrire comme un somme de nombres de Fibonacci :

$2 = 1 + F_1 \ (= F_2)$	$17 = 1 + F_6 + F_3$
$3 = 1 + F_2 \ (= F_3)$	$18 = 1 + F_6 + F_3 + F_1$
$4 = 1 + F_3$	$19 = 1 + F_6 + F_4$
$5 = 1 + F_3 + F_1 \ (= F_4)$	$20 = 1 + F_6 + F_4 + F_1$
$6 = 1 + F_4$	$21 = 1 + F_6 + F_4 + F_2 \ (= F_7)$
$7 = 1 + F_4 + F_1$	$22 = 1 + F_7$
$8 = 1 + F_4 + F_2 \ (= F_5)$	$23 = 1 + F_7 + F_1$
$9 = 1 + F_5$	$24 = 1 + F_7 + F_2$
$10 = 1 + F_5 + F_1$	$25 = 1 + F_7 + F_3$
$11 = 1 + F_5 + F_2$	$26 = 1 + F_7 + F_3 + F_1$
$12 = 1 + F_5 + F_3$	$27 = 1 + F_7 + F_4$
$13 = 1 + F_5 + F_3 + F_1 \ (= F_6)$	$28 = 1 + F_7 + F_4 + F_1$
$14 = 1 + F_6$	$29 = 1 + F_7 + F_4 + F_2$
$15 = 1 + F_6 + F_1$	$30 = 1 + F_7 + F_5$
$16 = 1 + F_6 + F_2$	$31 = 1 + F_7 + F_5 + F_1$

Lemme préliminaire Soit p un entier naturel, $p \geq 3$. Alors $2F_{p-1} > F_p > 2F_{p-2} \geq 2\,F_i$ où $i \leq p - 2$.

Preuve :

a) $F_p = F_{p-1} + F_{p-2} = F_{p-2} + F_{p-3} + F_{p-2} = 2\,F_{p-2} + F_{p-3}$. Comme $F_{p-3} > 0$, $F_p > 2\,F_{p-2}$. De plus, la suite (F_n) étant croissante, pour tout i, $i \leq p - 2$, on a $F_{p-2} \geq F_i$ donc $2\,F_{p-2} \geq 2\,F_i$.

b) $F_p - F_{p-1} = F_{p-2} < F_{p-1}$ car la suite (F_n) est croissante. Donc $F_p < 2\,F_{p-1}$.

Lemme Tout entier naturel a, $a \geq 2$, peut s'écrire de manière unique sous la forme $a = 1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \ldots + F_{p_k}$ où $k \geq 1$ et où $F_{p_1}, F_{p_2}, \ldots, F_{p_k}$ sont des nombres de la suite de Fibonacci avec pour tout $i > 1$, $p_i > p_{i-1} - 2$.

Démonstration: par récurrence.

Cette propriété [à savoir, l'existence d'une décomposition satisfaisant aux conditions du lemme] est vraie pour $a = 2$ ($F_2 = 1 + F_1$).

Supposons qu'elle soit vraie jusqu' à a.

Considérons $a + 1$:

Soit F_{p_1} le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à a : $F_{p_1} \leq a < F_{p_1+1}$

$a + 1 = 1 + F_{p_1} + R$; (R = le reste = $a - F_{p_1}$)

Si $R = 0$, $a + 1 = 1 + F_{p_1}$, c'est terminé, la propriété est vérifiée.

Sinon, $R \geq 1$, F_{p_1} est le plus grand nombre de Fibonacci strictement inférieur à a : $F_{p_1} < a < F_{p_1+1}$

$a + 1 = 1 + F_{p_1} + R = F_{p_1} + R + 1$. On a $R + 1 \geq 2$. D'autre part $R < F_{p_1+1} - F_{p_1} = F_{p_1-1}$ donc $R < a$. Donc $R + 1 \leq a$.

On peut appliquer à $R + 1$ l'hypothèse de récurrence: $R + 1 = 1 + F_{p_2} + F_{p_3} + \ldots + F_{p_k}$ où F_{p_2} est le plus grand nombre de Fibonacci $\leq R$ et on a les conditions sur les indices p_2 , p_3 , etc. :

$p_3 \leq p_2 - 2, \ldots, p_k \leq p_{k-1} - 2$.

Alors $a + 1 = F_{p_1} + 1 + F_{p_2} + F_{p_3} + \ldots + F_{p_k} = 1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \ldots + F_{p_k}$.

On a F_{p_1} qui est le plus grand nombre de Fibonacci $\leq a$, F_{p_2} qui est le plus grand nombre de Fibonacci $\leq R$; [les nombres] p_2 , p_3, etc. vérifient les conditions sur les indices. On n'a plus qu'à s'assurer que $p_2 \leq p_1 - 2$.

Comme $F_{p_2} \leq R < F_{p_1-1}$,[on en déduit] $p_2 < p_1 - 1$ donc $p_2 \leq p_1 - 2$. CQFD.

En ce qui concerne l'unicité [de la décomposition], nous n' en exposons pas la preuve en détail pour ne pas lasser le lecteur. Nous en donnons simplement le principe: nous avons montré par récurrence qu'un autre choix de nombres de Fibonacci que celui inférieur ou égal à a [ne] pouvait aboutir à une autre décomposition que celle attendue (les nombres de Fibonacci ne se suivant pas de 2 en 2 au minimum). Cela est dû à la propriété $2\ F_{p_1-1} > F_{p_1}$ (par exemple: $29 = 1 + F_7 + F_4 + F_2 = 1 + 2\ F_6 + F_2$ qui ne convient pas , autre exemple: $30 = 1 + F_7 + F_5 = 1 + 2\ F_6 + F_3$).

Théorème. Si a désigne le nombre d'allumettes , $a \geq 2$, a s'écrit $1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \ldots + F_{p_k}$ avec les conditions déjà énoncées [dans le lemme précédent]. La position (a,n) est gagnante si on peut retirer F_{p_k} allumettes, c'est-à-dire si $F_{p_k} \leq 2n$, et perdante sinon.

Preuve de : “ *La position (a,n) est gagnante si on retire F_{p_k} allumettes* ”.

Par récurrence [sur le nombre a] : vrai pour $a = 2$ ($2 = 1 + F_1$ et on gagne en retirant $F_1 = 1$ allumette).

Supposons que la propriété soit vraie pour $a \geq 2$ et pour les [nombres ≥ 2 qui] précédent a. Montrons qu’elle est vraie pour $a + 1$.
Reprenons les mêmes notations que dans la démonstration précédente :

$a+1 = 1 + F_{p_1} + R$ où F_{p_1} est le plus grand nombre de Fibonacci $\leq a$.

Si R = 0, $a + 1 = 1 + F_{p_1}$; $(a+1,n)$ est une position gagnante si on enlève F_{p_1} allumettes car on passe alors à la position $(1, F_{p_1})$ qui est perdante (on sait d’après la règle du jeu que toutes les positions $(1,n)$ sont perdantes).

Sinon, $a + 1 = 1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \ldots + F_{p_k}$

Si on enlève F_{p_k}, qui est 1 , on obtient $1 + F_{p_1} + F_{p_2} + F_{p_3} + \ldots + F_{p_{k-1}}$ qui est a ; pour gagner , d’après l’hypothèse de récurrence, il faut enlever $F_{p_{k-1}}$.

Or le maximum qu'on puisse enlever d'après la règle du jeu est $2\ F_{p_k}$.

Or d’après le lemme préliminaire, comme $p_k \leq p_{k-1}-2$ on a $F_{p_{k-1}} > 2\ F_{p_k}$.

Il n'y a donc pas assez d'allumettes pour gagner ; le retrait de F_{p_k} allumettes avec $(a+1)$ allumettes met l' adversaire en position perdante; donc $(a+1,n)$ est gagnant avec F_{p_k} .

Preuve de “ *La position (a,n) est perdante si on retire moins de F_{p_k} allumettes* ”.

Par hypothèse a s’écrit $1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \ldots + F_{p_k}$ avec les conditions sur les [indices].

On enlève m allumettes avec $m < F_{p_k}$.

Alors $a - m = 1 + F_{p_1} + F_{p_2} + \ldots + F_{p_{k-1}} + (F_{p_k} - m)$. Or $F_{p_k} - m$ s’écrit $1 + F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_j}$ avec 2 d’écart au minimum entre F_{k_i} et $F_{k_{i+1}}$

Evidemment $F_{p_k} - (F_{p_k} - m) = m$ d’où $F_{p_k} = 1 + F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_j} + m$.

Pour "faire tomber" F_{k_j} ,il faut que m soit supérieur ou égal à F_{k_j-1} donc que $2m \geq 2F_{k_j-1}$.

Or d’après le lemme préliminaire on a $2F_{k_j-1} > F_{k_j}$ d’où $2m \geq 2\ F_{k_j-1} > F_{k_j}$ d’où $2m > F_{k_j}$.

L’adversaire est dans la position $(a-m,m)$ qui est gagnante avec F_{k_j} (car F_{k_j} est le plus petit Fibonacci de la décomposition de $(a - m)$ et il peut le faire car $F_{k_j} < 2m$. Donc la position (a,n) est perdante avec m allumettes retirées, $m < F_{p_k}$. CQFD.

Corollaire : Pour le jeu avec a allumettes au départ, $a \geq 2$, le joueur qui commence a une stratégie gagnante si et seulement si la décomposition de a se termine par F_1 ou F_2 (c'est-à-dire 1 ou 2).

Conclusion : Pour un tas de 50 allumettes, la stratégie gagnante pour le joueur qui commence est de retirer 2 allumettes car la décomposition de 50 se termine par 2.

$$50 = 34 + 16 = 34 + 1 + 13 + 2 = 1 + 34 + 13 + 2 = 1 + F_8 + F_6 + F_2$$

B. Variantes

Dans un premier temps, nous avons voulu automatiser le processus pour étudier le problème au-delà de 50 allumettes puis nous avons changé le nombre de tas (2 tas de 50 allumettes) et cherché une stratégie gagnante en ne retirant que dans un seul tas à son tour de jouer. Enfin, en revenant à un seul tas d'allumettes, nous avons cherché une stratégie gagnante pour une règle de jeu différente.

B.I. Au-delà de 50 allumettes

Les programmes

Ils sont basés sur les observations faites qui ont été démontrées par la suite.

Un programme sur ordinateur en turbopascal : ce programme crée un premier tableau de nombres de Fibonacci et insère un bout de tableau de nombres de Fibonacci dans les cases laissées libres du tableau précédent. Ce programme fournit le nombre d'allumettes à retirer pour gagner avec un nombre d'allumettes inférieur ou égal à 10 950. Voir le texte du programme en Annexe 1

Un programme sur TI 83+ : le concepteur du programme a repéré la répétition de la suite des nombres de Fibonacci dans le tableau des nombres d'allumettes à retirer pour être en position gagnante, son programme teste quand le (nombre d'allumettes - 1) est entre deux nombres de Fibonacci puis il revient à une ligne antérieure et peut donc donner le nombre d'allumettes à jouer (qui est toujours un nombre de Fibonacci).
[NDLR - L'algorithme du programme ne nous est pas parvenu. Voir le texte du programme en Annexe 2]

B.II. Deux tas de 50 allumettes

Observations

Nous nous sommes ensuite intéressés à une éventuelle stratégie gagnante sur deux tas de 50 allumettes. Chaque joueur retire à son tour les allumettes dans un ~~même~~ [seul des deux] tas, [qu'il est libre de choisir]. Comme pour [le jeu avec] un seul tas, nous avons modélisé les différentes positions de jeu par des triplets. Pour les écrire :

- nous avons bloqué un paramètre du triplet (le nombre d'allumettes dans le 1er tas) ;
- puis nous avons fait varier le nombre d'allumettes dans le 2ème tas (dans les lignes) jusqu'à ce qu'il y ait autant d'allumettes dans chaque tas ;
- enfin le nombre d'allumettes retirées le coup précédent (dans les colonnes) jusqu'au nombre minimum nécessaire pour vider un tas entièrement.

Comment les lire ?

(a, b, n) *a* est le nombre d'allumettes dans le premier tas
b est le nombre d'allumettes dans le second tas
n est le nombre d'allumettes retirées le coup précédent

La lettre en gras [qui suit un triplet] indique la position gagnante (**G**) ou perdante (**P**)
Le chiffre en italique [qui suit la lettre] indique une possibilité de nombre d'allumette(s) à retirer pour gagner, avec le tas précisé par la lettre correspondante *A* ou *B*.

Cette écriture implique très vite de nombreux triplets pour chaque allumette en plus dans le 1er tas (paramètre bloqué), nous avons donc travaillé sur les premiers triplets jusqu'à (9, 9, 5).

Nb : la différence essentielle entre ces triplets et les couples est qu'à un triplet gagnant peuvent correspondre plusieurs stratégies. Ex : [dans la position] (4, 1, 2) on peut jouer *1A* ou *4A* .

Voici donc les premiers triplets : (La lecture de ce tableau commençe par le bas).

(6, 1, 1)**G** *1A* (6, 2, 1)**P** (6, 3, 1)**G** *1B* (6, 4, 1)**G** *2A* (6, 5, 1)**G** *1A* (6, 6, 1)**P**
(6, 1, 2)**G** *1A* (6, 2, 2)**G** *4A* (6, 3, 2)**G** *1B* (6, 4, 2)**G** *2A* (6, 5, 2)**G** *1A* (6, 6, 2)**P**
(6, 1, 3)**G** *1A* (6, 2, 3)**G** *4A* (6, 3, 3)**G** *1B* (6, 4, 2)**G** *2A* (6, 5, 3)**G** *1A* (6, 6, 3)**P**
(5, 1, 1)**P** (5, 2, 1)**G** *1B* (5, 3, 1)**G** *2A* (5, 4, 1)**G** *1A* (5, 5, 1)**P**
(5, 1, 2)**P** (5, 2, 2)**G** *1B* (5, 3, 2)**G** *2A* (5, 4, 2)**G** *1A* (5, 5, 2)**P**
(5, 1, 3)**G** *5A* (5, 2, 3)**G** *1B* (5, 3, 3)**G** *2A* (5, 4, 3)**G** *1A* (5, 5, 3)**P**
(4, 1, 1)**G** *1A* (4, 2, 1)**G** *A* (4, 3, 1)**G** *1A* (4, 4, 1)**P**
(4, 1, 2)**G** *1A* (4, 2, 2)**G** *2A* (4, 3, 2)**G** *1A* (4, 4, 2)**P**
(3, 1, 1)**P** (3, 2, 1)**G** *1A* (3, 3, 1)**P**
(3, 1, 2)**G** *3A* (3, 2, 2)**G** *1A* (3, 3, 2)**P**
(2, 1, 1)**G** *2A* (2, 2, 1)**P**
(1, 1, n)**G** *1A*

On voit nettement que tous les triplets de la forme (a, a, n) sont perdants (pour $a \neq 1$), c'est-à-dire quand les deux tas possèdent le même nombre d'allumettes.
On est sûr jusqu'à $(9, 9, n)$ que ces positions sont perdantes.

Conjecture et preuve

On émet donc la conjecture suivante.

Une stratégie gagnante revient à jouer le même nombre d'allumettes que son adversaire mais dans le tas opposé, tant que le nombre d'allumettes dans chaque tas est supérieur ou égal à 2.

Le 2ème joueur commence donc en position gagnante. Nous avons appliqué cette stratégie sur deux tas de 50, et elle fonctionne aussi, puis nous avons démontré qu'elle fonctionne pour n'importe quel a1.
On sait que toutes les positions (a, a, n) sont perdantes pour a=2 jusqu'à a=9.
On cherche à montrer par récurrence que c'est vrai pour tout $a \geq 2$.

Supposons que c'est vrai pour toutes les valeurs de 2 jusqu'à p. Nous avons donc pour tout k , $2 \leq k \leq p$, (k, k, n)**P** . On cherche à montrer que c'est vrai pour $(p+1, p+1, n)$

- Supposons que notre adversaire enlève j allumettes avec $1 \leq j \leq p - 1$ donc $p+1-j \geq 2$.
  Nous nous retrouvons donc dans une position $(p+1-j, p+1, j)$
  Nous décidons donc de retirer j allumettes dans l'autre tas.
  Notre adversaire se retrouve donc dans une position $(p+1-j, p+1-j, j)$ qui est une position perdante car elle est de la forme (p', p', j) où $p'=p+1-j$ et $2 \leq p' \leq p$. ~~CQFD~~

- Si maintenant dans la configuration $(p+1, p+1, n)$, notre adversaire est en mesure d'enlever p+1 allumettes dans un tas, une stratégie gagnante consiste à en ôter p dans l'autre tas; et s'il peut enlever p allumettes dans un tas, une stratégie gagnante est de vider l'autre tas. [CQFD]

Nous avons essayé de travailler sur 3 tas, mais nous n'avons pas réussi à modéliser les positions sous forme d'ensembles à 4 termes.

B. III. Avec un tas de 50 allumettes et avec les règles de 3n et 4n :

Règle de 3*n* : *Si un joueur retire n allumettes, son adversaire peut retirer jusqu'à 3n allumettes.*

Observations

Nous avons construit la suite des nombres d'allumettes à jouer tout d'abord à la main jusqu'à 50 allumettes et nous avons trouvé ceci :

1 2 3 4 1 6 1 8 1 2 11 1 2 3 15 1 2 3 4 1 21 1 2 3 4

1 6 1 29 1 2 3 4 1 6 1 8 1 2 40 1 2 3 4 1 6 1 8 1 2

Conjecture :

Nous avons alors conjecturé la construction de la suite de la manière suivante (construction qui est similaire à celle du problème initial):

- tout d'abord, on commence par écrire le début de la suite [de base] suivante :
  [1] 2 3 4 6
- puis pour calculer la suite de cette suite on applique la formule suivante : $U_P = U_{P-1} + U_{P-4}$
  [1] 2 3 4 6 8 11 15 21 29 40 55 …
- **enfin, lorsque un nombre (*A*) de la suite** [que l'on est en train de construire] **est supérieur ou égal à 4, on le divise par 3 et le quotient ainsi obtenu désigne le nombre de termes de la suite à inscrire après le nombre (n°1)** [comme pour le jeu avec la règle de 2*n*, les nombres que l'on inscrit sont les premiers termes de la suite que l'on est en train de construire] .
  Exception : si le nombre à diviser est un multiple de 3, alors il faudra enlever 1 au résultat [c'est à dire au quotient obtenu].

> [NDLR : en fait la dernière règle donnée ici reste imprécise et ne permet pas de prolonger de manière sûre la suite au delà du nombre 40. Il nous semble que les termes intercallés doivent être écrit au fur et à mesure et qu'il faille appliquer la règle d'intercalation immédiatement pour chaque nombre supérieur à 3 nouvellement écrit : au final, le nombre total de termes intercallés entre deux termes consécutifs A et B de la suite originale 1 2 3 4 6 8 11 15 21 29 40 55 …, peut dépasser le quotient entier de A par 3 (diminué d'une unité si A est divisible par 3). Un tel cas de dépassement se produit dès la valeur *A*= 21 : sept termes au final vont être intercallés avant *B* = 29 et non six comme le voudrait une simple application de la règle]

Ainsi on peut calculer la suite :

1 2 3 **4** 1 **6** 1 **8** 1 2 **11** 1 2 3 **15** 1 2 3 4 1 **21** 1 2 3 4

1 6 1 **29** 1 2 3 4 1 6 1 8 1 2 **40** 1 2 3 4 1 6 1 8 1 2

[suivi de 11 1 2 3 **55** … ?]

<u>Règle de 4*n*</u> : *Si un joueur enlève n allumettes le joueur suivant peut en retirer jusqu'à 4n.*

Observations :

Nous avons construit la suite des nombres d'allumettes à jouer tout d'abord à la main jusqu'à 50 allumettes et nous avons trouvé ceci :

1 2 3 4 5 1 7 1 9 1 2 12 1 2 15 1 2 3 19 1 2 3 4 24 1

2 3 4 5 1 31 1 2 3 4 5 1 7 1 40 1 2 3 4 5 1 7 1 9

Conjecture :

Nous avons alors conjecturé la construction de la suite de la manière suivante (similaire à la construction précédente) :

- tout d'abord on commence par écrire le début de la suite [de base] suivante :
  1 2 3 4 5 7 9 12
- puis pour calculer la suite [de base], on applique la formule suivante : $U_P = U_{P-1} + U_{P-6}$
  1 2 3 4 5 7 9 12 15 19 24 31 40 ...
- **<u>enfin, lorsqu'un nombre (A) de la suite est supérieur ou égal à 5, on le divise par quatre et le quotient ainsi obtenu désigne le nombre de termes de la suite déjà obtenue à inscrire après le nombre (A)</u>.**
  <u>Exception</u> : si le nombre à diviser est un multiple de 4, alors il faudra enlever 1 au quotient obtenu.

  [NDLR. Pour préciser l'application de la règle, voir la précédente note. On obtient :]

1 2 3 4 **5** 1 **7** 1 **9** 1 2 **12** 1 2 **15** 1 2 3 **19** 1 2 3 4 **24** 1

2 3 4 5 1 **31** …

Généralisation à *kn* :

- Tout d'abord, il faut commencer par écrire les nombres de 1 à k+1 dans l'ordre croissant.
- Puis, arrivé à k+1, on applique la formule $U_P = U_{P-1} + U_{P-k}$ jusqu'à ce que [P soit égal à] $k(k-1)$.
- Ensuite, on applique jusqu'à la fin la formule $U_P = U_{P-1} + U_{P-2(k-1)}$.
  [On obtient ainsi la suite dite *suite de base*.]
- **<u>Enfin,</u>** [on forme une nouvelle suite en appliquant la règle suivante :] **<u>lorsqu'un nombre (1) de la suite est supérieur ou égal à k+1, on le divise par k et le quotient ainsi obtenu désigne le nombre de termes de la suite déjà obtenue à inscrire après le nombre (1)</u>.**
  <u>Exception</u> : si le nombre à diviser est un multiple de k, alors il faudra enlever 1 au quotient obtenu.

  [NDLR. Pour préciser l'application de la règle, voir la note du cas 3*n*.]

B. IV. Avec un tas de 50 allumettes et la règle de n+1

<u>Règle de n+1 :</u> *Si un joueur enlève n allumettes, alors le joueur suivant peut en retirer jusqu'à n*+1.

<u>Observations :</u>
Nous avons construit la liste des positions gagnantes à la main jusqu'à 81 allumettes:

(81,1)P…(81,79)G**80**	
(80,1)G**1**	(40,1)G**1**
(79,1)P (79,2)G**3**	(39,1)P (39,2)G**3**
(78,1)G**2**	(38,1)G**2**
(77,1)G**1**	(37,1)G**1**
(76,1)P …(76,4)G**5**	(36,1)P …(36,4)G**5**
(75,1)G**1**	(35,1)G**1**
(74,1)P (74,2)G**3**	(34,1)P (34,2)G**3**
(73,1)G**2**	(33,1)G**2**
(72,1)G**1**	(32,1)G**1**
(71,1)P …(71,9)G**10**	(31,1)P (31,9)G**10**
(70,1)G**1**	(30,1)G**1**
(69,1)P (69,2)G**3**	(29,1)P (29,2)G**3**
(68,1)G**2**	(28,1)G**2**
(67,1)G**1**	(27,1)G**1**
(66,1)P …(66,4)G**5**	(26,1)P ..(26,4)G**5**
(65,1)G**1**	(25,1)G**1**
(64,1)P (64,2)G**3**	(24,1)P (24,2)G**3**
(63,1)G**2**	(23,1)G**2**
(61,1)P …(61,19)G**20**	(22,1)G**1**
(60,1)G**1**	(21,1)P …(21,19)G**20**
(59,1)P (59,2)G**3**	(20,1)G**1**
(58,1)G**2**	(19,1)P (19,2)G**3**
(57,1)G**1**	(18,1)G**2**
(56,1)P …(56,4)G**5**	(17,1)G**1**
(55,1)G**1**	(16,1)P …(16,4)G**5**
(54,1)P (54,2)G**3**	(15,1)G**1**
(53,1)G**2**	(14,1)P (14,2)G**3**
(52,1)G**1**	(13,1)G**2**
(51,1)P …(51,9)G**10**	(12,1)G**1**
(50,1)G**1**	(11,1)P…(11,9)G**10**
(49,1)P (49,2)G**3**	(10,1)G**1**
(48,1)G**2**	(9,1)P (9,2)G**3**
(47,1)G**1**	(8,1)G**2**
(46,1)P.. (46,4)G**5**	(7,1)G**1**
(45,1)G**1**	(6,1)P (6,2)P..(6,4)G**5** (5,1)G**1**
(44,1)P (44,2)G**3**	(4,1)P (4,2)G**3**
(43,1)G**2**	(3,1)G**2**
(42,1)G**1**	(2,1)G**1**
(41,1)P …(41,39)G**40**	(1,n)P

Conjecture :

Nous avons alors conjecturé la règle suivante, qui permet de savoir le nombre d'allumettes à enlever :

- Avec un nombre d'allumettes divisible par 5, pour gagner il faut enlever 1 allumette.
- Avec un nombre d'allumettes dont le chiffre des unités est: 2 ou 7 , pour gagner, il faut enlever 1 allumette
- Avec un nombre d'allumettes dont le chiffre des unités est: 3 ou 8 , pour gagner, il faut enlever 2 allumettes.
- Avec un nombre d'allumettes dont le chiffre des unités est: 4 ou 9, pour gagner, il faut enlever 3 allumettes.
- Lorsque le chiffre des unités est 1, on va s'intéresser au chiffre des dizaines :
  - S'il est impair : il faut jouer 10 allumettes.
  - S'il est pair : on le divise par 2 :
    - si le nombre obtenu est impair, il faut jouer 20 allumettes.
    - si le nombre obtenu est pair, il faut jouer le nombre d'allumettes –1.

Conclusion

Nous avons trouvé une solution au problème initial : avec 50 allumettes, le joueur qui commence est en position gagnante s'il retire 2 allumettes. Nous avons trouvé une stratégie lui permettant de gagner. Nous avons pu généraliser ensuite cette stratégie à un nombre quelconque d'allumettes.

Après avoir modifié les règles, nous avons proposé des stratégies suite à nos observations. Il reste encore à les démontrer.

Par la suite , nous pourrions envisager d'autres recherches en ajoutant un troisième joueur avec un seul tas d'allumettes tout d'abord. Le problème semble d'une autre nature car il faut prévoir les possibilités de deux joueurs au lieu d'un seul.

Annexes en pages suivantes

MOTS CLEFS

STRATÉGIE JEU ALLUMETTE DOUBLE FIBONACCI DÉCOMPOSITION PROGRAMME RÉCURSIF

Comptes Rendus MATh.en.JEANS n° 05-03

Annexe 1 : Programme en Turbo Pascal

```
Uses wincrt;
Const  u1:Byte=1;
     u2:Byte=2;
Type  Tnombre=Integer;
Var  Nombre:Tnombre;
Const Nmax=12045;
Type Ttableau=Array[0…Nmax] of Tnombre;
Var i:Tnombre;
       T,TabFibo:Ttableau;
Procedure  Fibonacci (var TabFibo:Ttableau);
          Var  c,un,un-1,un-2:Tnombre;
          Begin
         If  Nombre > =1 then TabFibo[1]:=u1;
         If  Nombre > =2 then
              Begin
              TabFibo[2]:=u2
              un-2:=u1
              un-1:=u2
              un:=un-1+un-2;
              While un<=Nombre  do
                   Begin
                   c:=un
                   TabFibo[c]:=c;
                   un-2:=un-1;
                   un-1:=un;
                   un:=un-1+un-2;
                   End;
              End;
     End;
Procedure  Inserer_bout_de_tableau (var
T:Ttableau;deb,fin:Tnombre);
          Var j:Tnombre;
     Begin
     For j:=deb  to  fin  do T[j]:=TabFibo[j-deb+1];
     End;
BEGIN
Writeln('Pas plus de 10950');
Write ('Nombre d'allumettes='); Readln(Nombre);
Nombre:=Nombre-1;
For i:=1  to  Nombredo TabFibo[i]:=0;
Fibonacci(TabFibo);
T:=TabFibo;
For i:=1  to  Nombre  do
     Begin
     If T[i]>2  then
     Inserer_bout_de_tableau(T,i+1,i+(T[i]div2));
     End;
For i:=1  to Nombre do Write (T[i],'  ');
Writeln ('  ');
Write (' il faut en jouer',T[Nombre]);
END
```

Annexe 2 : Programme pour TI 83+

```
*/ initialisation des variables. /*
a=1        */ valeur inférieure de l'intervalle [a;b]/*
b=2        */ valeur supérieure de l'intervalle [a;b]/*
c=0        */ nombre d'allumettes restantes/*
input c */ on entre la valeur de c /*
c=c-1
lbl1
     If c=a or c=b
        goto 3
     If a<c and c<b
       then
       b=2
      c=c-a
      a=1
      goto 1
     end
    b=a+b
    a=b-a
 goto 1
lbl3
disp m
*/ m est le nombre d'allumettes à enlever!
si m ne peut pas être joué alors c'est perdu!/*
goto 0
```

MOTS CLEFS : STRATÉGIE JEU ALLUMETTE DOUBLE FIBONACCI DÉCOMPOSITION PROGRAMME RÉCURSIF	
Comptes Rendus MATh.en.JEANS n° 05-03	***© MATh.en.JEANS Éditions 2007***

***