Math en Jeans 2006

Combien faut-il de points pour définir une courbe ?

Lycée Sud-Medoc / Lycée Montaigne

Fanny Patin, Mélodie Durnez, Perrine Enjalbert,
Amélie Lassalle, Baudoin Auzou,
Guillaune Camelot, Luc Darmé, Antoine Carof

en partenariat avec Remi Abgrall (Université Bordeaux 1)

Table des matières

1 Présentation du sujet

1.1 Le sujet mathématique

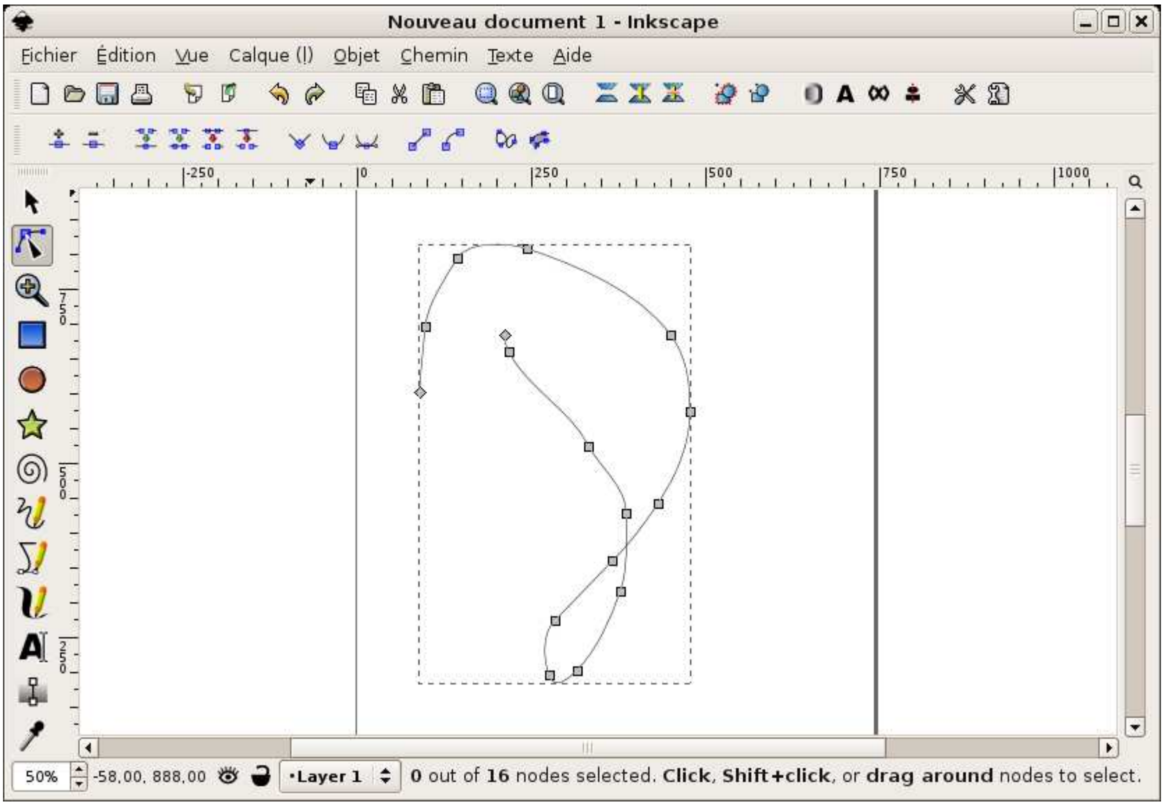
Le sujet choisi tient en une seule phrase :

Combien faut-il de point pour déterminer une courbe ou une surface ?

Nous nous sommes surtout intéressés au cas des courbes, délaissant le cas des surfaces qui semble bien plus vaste et plus complexe.

1.2 Les applications concrètes d'une telle démarche

La question à laquelle nous allons essayer de répondre est d'un certain intérêt dans le domaine de l'informatique, au niveau des fichiers graphiques.
En effet, au niveau d'un ordinateur, les graphiques sont présents sous deux formats : le format `bitmap` et le format `vectoriel`.
Le format `bitmap` est le format le plus basique que l'on peut utiliser en informatique. Il sagit en fait de décrire une image pixel par pixel. Ainsi une droite de couleur noire est codée au niveau informatique comme un ensemble de pixels de couleur noire. De même pour un cercle ou tout autre figure. La seule manière d'agir dessus est donc de modifier l'image pixel par pixel. C'est ce que propose par exemple le logiciel *Paint* fourni par *Microsoft* dans son système d'exploitation *Windows*.
Le mode `vectoriel` fait appel à une description géométrique des éléments d'une figure. Ainsi un cercle sera codé par les coordonnées de son centre et son rayon. Lorsque l'on agit sur la figure, on agit tout simplement sur les paramètres de cette figure. Le dessin vectoriel fait appel aux ressources d'un ordinateur pour dessiner le cercle. La modification des paramètres du cercle entraîne le recalcul des différents pixels à afficher.
La manipulation ou la modification d'une image est donc plus intuitive et plus aisée si celle-ci est stockée au format vectoriel.
La figure ci-dessous présente la description d'un tracé dans la cas d'un format vectoriel. Il est ainsi possible d'influer sur ce tracé par les différents points de contrôle qui apparaissent au niveau du tracé. Il est même possible d'en faire apparaître d'autres.

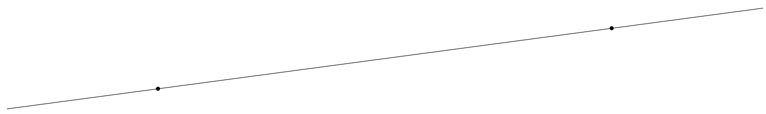


2 Le cas des courbes simples

Nous avons décidé de commencer par étudier des courbes simples. Pour chacune de ces courbes, nous avons cherché à trouver combien de points étaient nécessaires pour la définir (qu'ils appartiennent ou non à la courbe, et par deux approches différentes : algébrique et géométrique).
On cherche à savoir : combien faut-il de points au minimum pour caractériser des courbes classiques ?

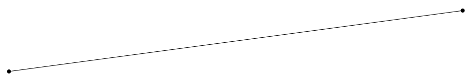
2.1 Cas d'une droite

Deux points suffisent à caractériser une droite.



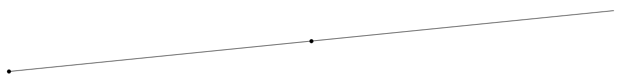
2.2 Cas d'un segment

Là encore, deux points suffisent.



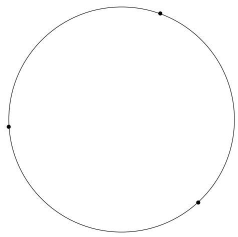
2.3 Cas d'une demi-droite

Deux points suffisent. Cependant ils n'ont pas le même rôle.



2.4 Cas d'un cercle

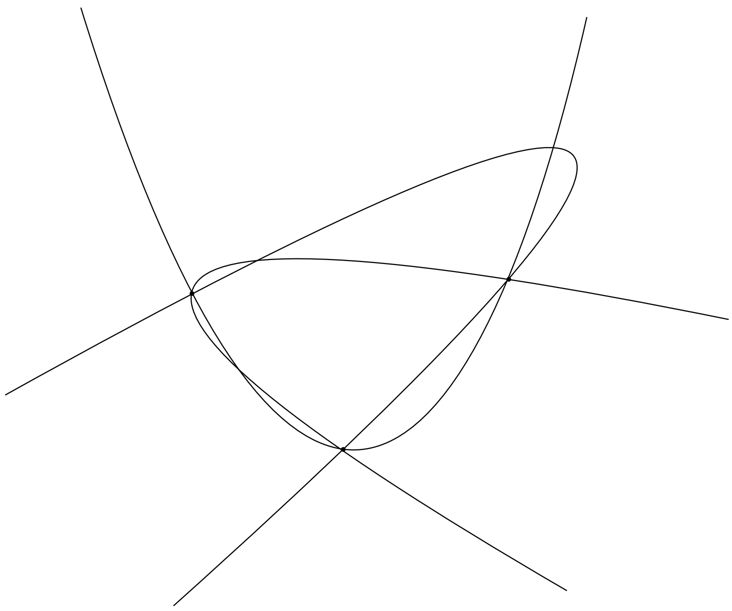
On a besoin de trois points, le cercle étant alors circonscrit au triangle formé par ces trois points.



On peut aussi caractériser un cercle par la donnée de son centre et d'un de ces points. Mais dans ce cas, un des deux points a un rôle bien particulier.

2.5 Cas d'un parabole

Trois points ne suffisent pas pour caractériser une parabole.



En fait, on a une infinité de paraboles passant par trois points fixes.
On va cependant voir que si l'on fixe un repère, il y a alors une seule parabole passant par ces trois points et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

3 Paraboles

3.1 Paraboles dans le plan, dans un repère

3.2 Détermination de l'équation de la parabole passant par 3 points

Par suggestion d'un de nos professeurs, on a décidé de chercher à déterminer mathématiquement l'équation d'une parabole passant par 3 points donnés, à partir de leurs coordonnées.
On considère donc le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient trois points de ce plan, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ et $C(x_3; y_3)$. On cherche à déterminer l'équation d'une parabole passant par ces trois points.
Ceci n'est possible que si $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$ et $x_1 \neq x_3$.
On supposera cette condition satisfaite et on cherche donc une équation de la forme $y =$

$ax^2 + bx + c$.
a, b et c sont donc solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{array}\right.$$

Les solutions sont données ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{x_2\,y_3 - x_1\,y_3 - x_3\,y_2 + x_1\,y_2 + x_3\,y_1 - x_2\,y_1}{(x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)} \\ b = \dfrac{-x_2^2\,y_3 + x_1^2\,y_3 + x_3^2\,y_2 - x_1^2\,y_2 - x_3^2\,y_1 + x_2^2\,y_1}{(x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)} \\ c = \dfrac{x_1\,x_2^2\,y_3 - x_1^2\,x_2\,y_3 - x_1\,x_3^2\,y_2 + x_1^2\,x_3\,y_2 + x_2\,x_3^2\,y_1 - x_2^2\,x_3\,y_1}{(x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)} \end{array}\right.$$

3.3 Parabole définie par un point et une droite

On cherche à déterminer l'équation d'une parabole, non plus à partir de points appartenant à la parabole, mais à partir d'un point distinct de la parabole et d'une droite. En effet, une parabole peut aussi être définie comme étant l'ensemble des points à égale distance d'un point appelé foyer et d'une droite.

3.3.1 Définition géométrique d'une parabole

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $F(a;b)$, $M(x,y)$ et la droite (D) d'équation $y = k$. L'ensemble des points M situé à égale distance du point F et de la droite (D) est une parabole que l'on notera $(\mathcal{C})$.
On sait donc que $d(M;(D)) = d(M,F)$ donc $d(M;(D))^2 = d(M,F)^2$.

3.3.2 Pour calculer $d(M,(D))^2$

On calcule en fait la distance entre M et son projeté orthogonal M' sur (D). Comme la droite (D) a pour équation $y = k$, M et M' ont même abscisse, et donc $d(M,(D)) = |y - k|$.
On a donc $d(M,(D))^2 = |y-k|^2 = (y-k)^2 = y^2 - 2ky + k^2$

3.3.3 Pour calculer $d(M,F)^2$

On a $d(M,F)^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2$

3.3.4 En définitive

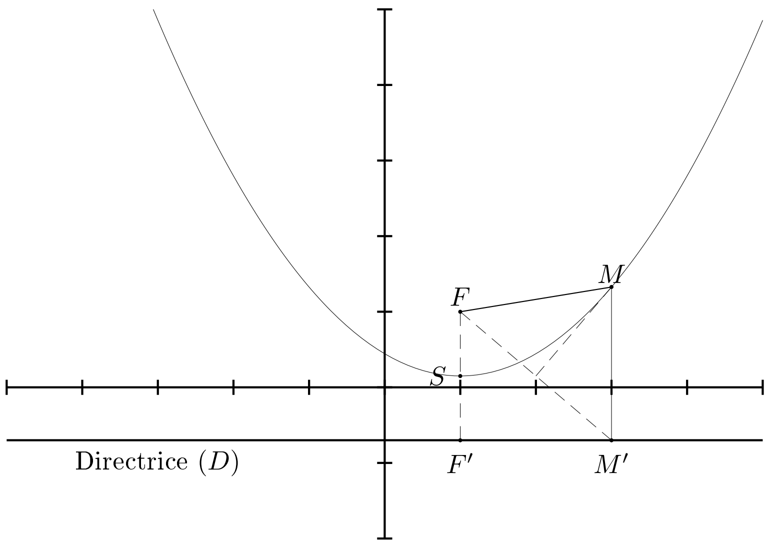
L'égalité $d(M,F)^2 = d(M,(D))^2$ se traduit par

$$y^2 - 2ky + k^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2$$

Si on résoud cette dernière équation en y, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & y^2 - 2ky + k^2 & = & a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2 \\ \Leftrightarrow & -2ky + k^2 & = & a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by \\ \Leftrightarrow & -2ky + 2by & = & a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - k^2 \\ \Leftrightarrow & y(-2k + 2b) & = & a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - k^2 \\ \Leftrightarrow & y & = & \dfrac{a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - k^2}{2b - 2k} \\ \Leftrightarrow & y & = & \dfrac{(a-x)^2 + (b-k)(b+k)}{2(b-k)} \\ \Leftrightarrow & y & = & \dfrac{(a-x)^2}{2(b-k)} + \dfrac{(b+k)}{2} \end{array}$$

3.3.5 Analyse du résultat



$$\text{Equation de la parable : } y = \frac{(a-x)^2}{2(b-k)} + \frac{(b+k)}{2}$$

$\frac{b+k}{2}$ correspond à l'ordonnée du milieu S de $[FF']$ avec F' projeté orthogonal de F sur la droite (D). Il s'agit du sommet de la parabole.
$(a-x)^2$ est l'éloignement de M par rapport à F (mesuré au niveau de leurs abscisses).
$2(b-k)$ nous donne l'orientation de la parabole :
- Si $k > b$ alors $b-k < 0$ et donc la parabole est croissante puis décroissante.
- Si $k < b$ alors $b-k > 0$ et donc la parabole est décroissante puis croissante.

3.3.6 Ecriture du résultat selon l'écriture usuelle de l'équation d'un parabole :

$$\begin{aligned} y &= \frac{(a-x)^2}{2(b-k)} + \frac{(b+k)}{2} = \frac{x^2-2ax+a^2}{2(b-k)} + \frac{(b+k)}{2} \\ &= \frac{1}{2(b-k)}x^2 - \frac{a}{(b-k)}x + \frac{a^2}{2(b-k)} + \frac{b+k}{2} \\ &= \frac{1}{2(b-k)}x^2 - \frac{a}{(b-k)}x + \frac{a^2+b^2-k^2}{2(b-k)} \end{aligned}$$

Soit donc une écriture sous la forme $y = Ax^2 + Bx + C$.

3.3.7 Calcul des coordonnées du foyer et de l'équation de la directrice à partir de l'équation $y = Ax^2 + Bx + C$

On identifie les différents coefficients intervenant dans les équations. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{2(b-k)} \\ B = \dfrac{-a}{(b-k)} \\ C = \dfrac{a^2+b^2-k^2}{2(b-k)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{-B}{2A} \\ \dfrac{B}{2A} = B(b-k) \quad (*) \\ C = \dfrac{a^2}{2(b-k)} + \dfrac{b+k}{2} \quad (**) \end{array}\right.$$

L'équation $(*)$ donne $k = b - \frac{1}{2A}$ et l'équation $(**)$ donne en utilisant l'égalité obtenue juste avant : $b = C - \frac{B^2-1}{4A}$.

On a donc finalement :

$$a = \frac{-B}{2A} \qquad b = C - \frac{B^2 - 1}{4A} \qquad k = C - \frac{B^2 + 1}{4A}$$

4 Bézier

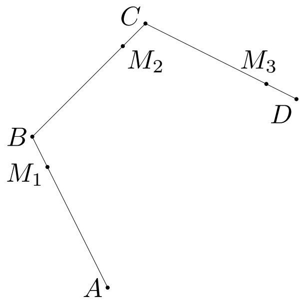
Parallèlement à cela, nos professeurs nous ont parlé de la courbe de Bézier, aussi nous avons suivi cette piste.
La courbe de Bézier répond exactement aux exigences de la problématique. En effet, elle est définie par quelques points dont seulement deux appartiennent à la courbe. Mais surtout, le déplacement de ces points entraîne au niveau de la courbe une modification tout à fait logique, ce qui en fait un outil très intuitif au niveau du dessin. Ainsi cet outil est présent dans tout logiciel de dessin vectoriel.
Elle fut découverte par Pierre Bézier (1910 - 1999), ingénieur à la régie Renault.

4.1 Biographie de Bézier

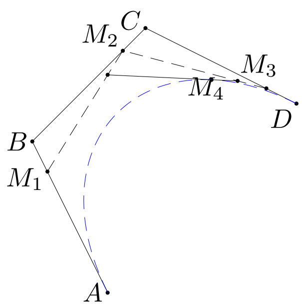
Bézier Pierre, ingénieur français a proposé des équations de courbes paramétrables de façon visuelle. Il a réalisé ses travaux dans le cadre du développement de logiciels de CAO au sein de la régie Renault. Il est mondialement célèbre pour les courbes qui portent son nom.
Fils et petit-fils d'ingénieurs, il a également choisi cette profession et s'est engagé dans le génie mécanique à l'Ecole des Arts et Métiers de Paris, où il a reçu son diplôme d'ingénieur en 1930. Au cours de la même année, il entra à l'Ecole Supérieure d'Electricité (SupElec) et obtint en 1931 un second diplôme d'ingénieur, cette fois en électricité.
Quelques 46 années plus tard, en 1977, il recevra son doctorat en mathématiques de l'Université de Paris.

4.2 Première introduction aux courbes de Bézier

On va considérer un cas simple : la courbe de Bézier construite à partir de quatre points distincts A, B, C et D.
La construction qui va suivre a seulement pour but de préciser le plus simplement possible comment se construit une courbe de Bézier. Il n'est pas ici question de définir rigoureusement cet objet géométrique.
Soit donc A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux. On considère un point M_1 mobile sur le segment $[A;B]$.
On construit le point M_2 du segment $[BC]$ tel que $\dfrac{AM_1}{AB} = \dfrac{BM_2}{BC}$. Le point M_2 est donc situé proportionnellement à BC à la même distance de B que M_1 l'est de A proportionnellement à AB.
De même, on construit sur le même principe le point M_3 du segment $[CD]$. On obtient ainsi la configuration suivante :



La construction se poursuit en placant sur le segment $[M_1; M_2]$ un point M_{12} tel que $\dfrac{M_1M_{12}}{M_1M_2} = \dfrac{AM_1}{AB}$.
De même, on construit sur le segment $[M_2; M_3]$ un point M_{23} vérifiant là encore une égalité de rapport.
Il reste alors à construire sur le segment $[M_{12}; M_{23}]$ un point M_4 qui vérifie lui aussi $\dfrac{M_{12}M_4}{M_{12}M_{23}} = \dfrac{AM_1}{AB}$. On obtient donc la configuration suivante :



Lorsque le point M_1 se déplace sur le segment $[AB]$, toute la construction se modifie. La courbe de Bézier est en fait le lieu que parcourt le point M_4 lorsque le point M_1 se déplace le long du segment $[AB]$. La courbe de Bézier est ce que l'on appelle un lieu géométrique.

4.3 Construction rigoureuse de la courbe de Bézier

La construction rigoureuse de la courbe de Bézier fait appel à la notion de barycentre. On donne ici la définition du barycentre de deux points A et B.
Si a et B sont deux réels tels que $a + b \neq 0$ alors il existe un unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. Ce point unique s'appelle le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), les réels a et b étant ce que l'on appelle des coefficients de pondérations.
Si a et b changent de valeur, le barycentre lui aussi change. Cependant, il reste toujours aligné avec les points A et B.
De plus, si O est un point quelconque du plan, on a $(a + b)\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.
Nous allons donc reprendre la construction précédente en utilisant les barycentres.

4.3.1 Cas de la construction avec trois points

Soit trois points A, B et C distincts deux à deux. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. On construit le point M_1 barycentre des points (A,t) et $(B,1-t)$. Ce barycentre a du fait du choix des coefficients de pondération la particularité d'être sur le segment $[AB]$. On construit de même le point M_2 comme barycentre des points pondérés (B,t) et $(C,1-t)$. Il reste alors à construire le point M_3 barycentre des points pondérés (M_1,t) et $(M_2,1-t)$.
Lorsque t varie entre 0 et 1, le point M_1 parcourt le segment $[A,B]$, le point M_2 parcourt le segment $[BC]$ et le point M_3 parcourt le segment $[M_1;M_2]$. Le lieu que parcourt le point M_3 est la courbe de Bézier construite à partir des points A, B et C.
Si O est un point quelconque du plan (par exemple l'origine d'un repère), on a

$$(t+1-t)\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_3} = t\overrightarrow{OM_1} + (1-t)\overrightarrow{OM_2}$$

Mais on a $(t+1-t)\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_1} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OM_2} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC}$. Donc on obtient finalement en remplacant dans la première expression $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ par leur expression en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OM_3} = t^2\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\overrightarrow{OB} + (1-t)^2\overrightarrow{OC}$$

4.3.2 Cas de la construction avec quatre points

Soit quatre points A, B, C et D distincts deux à deux. Soit alors t un réel de l'intervalle $[0;1]$. On introduit alors les barycentres suivants :
- M_1 est le barycentre de (A,t) et $(B,1-t)$.
- M_2 est le barycentre de (B,t) et $(C,1-t)$.
- M_3 est le barycentre de (C,t) et $(D,1-t)$.
- M_{12} est le barycentre de (M_1,t) et $(M_2,1-t)$.
- M_{23} est le barycentre de (M_2,t) et $(M_3,1-t)$.
- M_4 est le barycentre de (M_{12},t) et $(M_{23},1-t)$.

La courbe de Bézier définie par les quatre points A, B, C et D est donc le lieu géométrique que parcourt le point M_4 lorsque t passe de 0 à 1. Comme pour le cas précédent, il est possible d'obtenir une égalité vectorielle exprimant $\overrightarrow{OM_4}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$. Ainsi on a :

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{OM_4} & = & t\overrightarrow{OM_{12}} + (1-t)\overrightarrow{OM_{23}} \\
 & = & t(t\overrightarrow{OM_1} + (1-t)\overrightarrow{OM_2}) + (1-t)(t\overrightarrow{OM_2} + (1-t)\overrightarrow{OM_3}) \\
 & = & t^2\overrightarrow{OM_1} + 2t(1-t)\overrightarrow{OM_2} + (1-t)^2\overrightarrow{OM_3} \\
 & = & t^2(t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}) + 2t(1-t)(t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC}) + (1-t)^2(t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OD}) \\
\overrightarrow{OM_4} & = & t^3\overrightarrow{OA} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OB} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OC} + (1-t)^3\overrightarrow{OD}
\end{array}$$

4.3.3 Généralisation et formule caractérisant une courbe de Bézier

Ainsi O étant un point fixe (par exemple l'origine d'un repère), dans le cas d'une courbe de Bézier définie à l'aide de trois points A, B, C et D, M un point du plan appartient à cette courbe si et seulement si il existe $t \in [0;1]$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = t^2\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\overrightarrow{OB} + (1-t)^2\overrightarrow{OC}$$

Dans le cas d'une courbe de Bézier définie à partir de quatre points A, B, C et D, un point M appartient à cette courbe si et seulement si il existe $t \in [0;1]$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = t^3\overrightarrow{OA} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OB} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OC} + (1-t)^3\overrightarrow{OD}$$

Il est possible de conjecturer la formule caractérisant une courbe de Bézier définie à l'aide de n points.

Ainsi, on peut reconnaître dans les deux formules précédentes les coefficients du binôme de Newton. En effet, si on assimile t à a et $1-t$ à b, on voit apparaître une "identité remarquable" :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= t^2\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\overrightarrow{OB} + (1-t)^2\overrightarrow{OC} \\
&= \underline{a^2}\overrightarrow{OA} + \underline{2ab}\overrightarrow{OB} + \underline{b^2}\overrightarrow{OC} \\
\overrightarrow{OM} &= t^3\overrightarrow{OA} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OB} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OC} + (1-t)^3\overrightarrow{OD} \\
&= \underline{a^3}\overrightarrow{OA} + \underline{3a^2b}\overrightarrow{OB} + \underline{3ab^2}\overrightarrow{OC} + \underline{b^3}\overrightarrow{OD}
\end{aligned}$$

Dès lors, on peut prévoir les différents coefficients en utilisant le triangle de Pascal. Il s'agit d'une pyramide de nombres où chaque nombre (à l'exeption du premier) est la somme des deux nombres directement au-dessus. On obtient ainsi :

$$\begin{array}{lccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Or on peut à l'aide d'une formule exprimer en fonction de la ligne n et de sa position dans une ligne, un nombre quelconque de ce triangle de Pascal. Cette formule est :

$$\binom{n}{t} = \frac{n!}{(n-t)!t!}$$

De ce fait, on peut en déduire une formule caractérisant une courbe de Bézier définie par n points A_i (i variant de 0 à $n-1$). Cette formule est donnée ci-dessous

$$\overrightarrow{OM_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k(1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OA_k}$$

4.4 Démonstration par récurrence de l'expression de la courbe de Bézier

La courbe de Bézier est donc un ensemble de points. Ces points sont en fait les points M_n définis par la relation suivante lorsque t varie entre 0 et 1 :

$$P_n : \overrightarrow{OM_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k(1-t)^{n-1-k}\overrightarrow{OA_k}$$

Cette relation définie donc une courbe de Bézier construite avec n points.
On pose pour les besoins de la démonstration $b = t$ et $a = 1-t$.

4.4.1 Initialisation

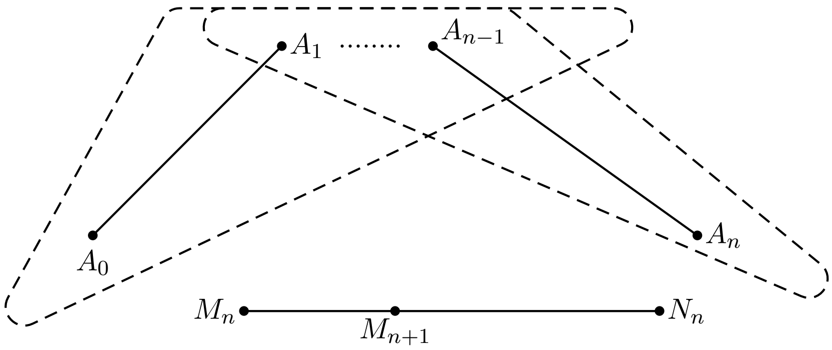
Pour trois points A_0, A_1 et A_2 non alignés comme vu dans l'exemple, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM_3} &= \binom{2}{0} a^2\overrightarrow{OA_0} + \binom{2}{1} ab\overrightarrow{OA_1} + \binom{2}{2} b^2\overrightarrow{OA_2} \\
&= (1-t)^2\overrightarrow{OA_0} + 2t(1-t)\overrightarrow{OA_1} + t^2\overrightarrow{OA_2}
\end{aligned}$$

Le résultat est identique à celui trouvé dans l'exemple sans formule donc P_3 est vraie.

4.4.2 Hérédité

On suppose qu'il existe $n \geq 3$ tel que P_n soit vraie, on va alors démontrer que P_{n+1} est vraie aussi. On réalise pour cela la construction suivante :



Donc on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM_n} &= \binom{n-1}{0} a^{n-1}\overrightarrow{OA_0} + \binom{n-1}{1} a^{n-2}b\overrightarrow{OA_1} \\
&+ .... + \binom{n-1}{k} a^{n-1-k}b^k\overrightarrow{OA_k} \\
&+ .... + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1}\overrightarrow{OA_{n-1}} + \oslash \\
\overrightarrow{ON_n} &= \oslash + \binom{n-1}{0} a^{n-1}\overrightarrow{OA_1} \\
&+ .... + \binom{n-1}{k-1} a^{n-k}b^{k-1}\overrightarrow{OA_k} \\
&+ .... + \binom{n-1}{n-2} b^{n-2}a\overrightarrow{OA_{n-1}} + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1}\overrightarrow{OA_n}
\end{aligned}$$

On calcule donc $\overrightarrow{OM_{n+1}}$ en faisant le barycentre de M_n et N_n respectivement affectés des coefficients a et b.

$$\begin{aligned}
a\overrightarrow{OM_n} &= \binom{n-1}{0} a^{n}\overrightarrow{OA_0} + \binom{n-1}{1} a^{n-1}b\overrightarrow{OA_1} \\
&+ .... + \binom{n-1}{k} a^{n-k}b^k\overrightarrow{OA_k} \\
&+ .... + \binom{n-1}{n-1} ab^{n-1}\overrightarrow{OA_{n-1}} + \oslash
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b\overrightarrow{ON_n} &= \oslash + \binom{n-1}{0} a^{n-1}b\overrightarrow{OA_1} \\
&+ .... + \binom{n-1}{k-1} a^{n-k}b^{k}\overrightarrow{OA_k} \\
&+ .... + \binom{n-1}{n-2} b^{n-1}a\overrightarrow{OA_{n-1}} + \binom{n-1}{n-1} b^{n}\overrightarrow{OA_n}
\end{aligned}$$

En additionnant termes à termes les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM_{n+1}} &= a\overrightarrow{OM_n} + b\overrightarrow{ON_n} \\
&= \binom{n}{0} a^n\overrightarrow{OA_0} + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}\right] a^{n-1}b\overrightarrow{OA_1} \\
&+ .... + \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] a^{n-k}b^k\overrightarrow{OA_k} + ... + \binom{n-1}{n-1} b^n\overrightarrow{OA_n}
\end{aligned}$$

D'où

$$\overrightarrow{OM_{n+1}} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n \overrightarrow{OA_0} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1} b \overrightarrow{OA_1} + ... + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k \overrightarrow{OA_k} + ... + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n \overrightarrow{OA_n}$$

Ce qui s'écrit

$$\overrightarrow{OM_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k \overrightarrow{OA_k}$$

donc P_{n+1} est vraie.

4.4.3 Conclusion

On vient donc de démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^{n-1-k} b^k \overrightarrow{OA_k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} (1-t)^{n-1-k} t^k \overrightarrow{OA_k} \end{aligned}$$

4.4.4 Annexe à la Démonstration par récurrence

Preuve de $\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$$

Or $(p-1)!(n-p)! = (p-1)!(n-1-p)!(n-p)$ et $p!(n-1-p)! = (p-1)!(n-1-p)!p$ donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} &= \frac{(n-1)!p + (n-1)!(n-p)}{(p-1)!(n-1-p)!(n-p)p} \\ &= \frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5 Conclusion

Ainsi donc, les courbes permettent de répondre d'une facon très satisfaisante à la problématique posée. C'est l'origine de leur succés puisque celles-ci se retrouvent implémentées dans de très nombreux outils (logiciel de dessin vectoriel mais aussi logiciel de CAO). La démarche peut aussi se généraliser à l'espace avec des surfaces définies sur le même principe. Il s'agit de Carreaux de Bézier ou Patch de Bézier.