Prouhet-Tarry-Escott

par

Laurence BOCLE, Remi BLOCH, Julien TERRIER, Mathieu ZOUBERT

(1ere S, lycee Montaigne, 33 - Bordeaux)

et

(lycée Sud-Médoc, 33 - Tailleau Médoc)

Jumelage Math.en..Jeans 1999-2000.

Enseignants : *Pierre GRIHON (lycee Montaigne) & Dominique GRIHON (lycée Sud-Médoc)*

Chercheur : *Laurent Habsieger, (Univ. Bordeaux I, 33 - Talence).*

Sujet initial

Le problème de Prouhet-Tarry-Escott (1851)

L'étude des décompositions des nombres entiers naturels en somme de carrés, de cubes, de puissances quatrièmes, etc. est un immense champ détude de la théorie des nombres. Le problème de Prouhet (1851), redécouvert par Tarry et Escott au début du siècle est le suivant : k étant un entier fixé, on cherche des familles de nombre, *différentes*, A et B, vérifiant les conditions :
- A et B ont le même nombre d'éléments, soit n,
- la *somme* des éléments de A est égale à la somme des éléments de B,
- la *somme des carrés* des éléments de A est égale à la somme des carrés des élémentsde B.
- la *somme des cubes* des éléments de A est égale à la somme des cubes des élémentsde B.

…
- la *somme des puissance k-ièmes* des éléments de A est égale à la somme des puissance k-ièmes des éléments de B.

0n imposera que les sommes des puissances (k+1)-ièmes ne sont pas égales [1]. On cherchera T(k), la plus petite valeur possible de n pour laquelle on peut trouver de telles familles (voir ci-après une piste pour cette étude).

le problème

Soient $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux *familles* d'entiers naturels et soit k un entier naturel. On dit que A et B sont ***k-équivalents***, et on note $A \equiv_k B$, si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall j \in \{1,\ldots,k\} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^j = \sum_{i=1}^{n} b_i^j$$

[…(2)]. Par exemple, $(0,4,5) \equiv_2 (1,2,6)$ car $0+4+5 = 1+2+6 = 9$ et $0^2+4^2+5^2 = 1^2+2^2+6^2 = 41$, mais (0, 4, 5) n'est pas 3-équivalent à (1, 2, 6) car $0^3+4^3+5^3 = 189 \neq 225 = 1^3+2^3+6^3$. [1]

On se fixe maintenant une valeur de k et on recherche des familles A et B telles que

$$A \equiv_k B \text{ et } A \not\equiv_{k+1} B.$$

On note T(k) le nombre minimal d'éléments de ces familles [3] ; **on veut étudier la fonction** T(k).

[**Piste de recherche** (proposée par L. Habsieger)]

« On suppose $A \equiv_k B$, avec

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ et } B = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Montrer que pour tout entier d, on a $A' \equiv_{k+1} B'$ avec :

$$A' = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1+d, b_2+d, \ldots, b_n+d)$$

et $$B' = (b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1+d, a_2+d, \ldots, a_n+d).$$

Par exemple, en partant de $A = (0, 3)$ et $B = (1, 2)$, on prend $d = 3$ et on obtient $(0,3,4,5) \equiv_2 (1,2,3,6)$, c'est à dire $(0,4,5) \equiv_2 (1,2,6)$. En recommençant avec d = 5, on trouve $(0,4,5,6,7,11) \equiv_3 (1,2,6,5,9,10)$ c'est-à-dire $(0,4,7,11) \equiv_3 (1,2,9,10)$.

Tenter d'obtenir des petites solutions ainsi. »

la k+1-équivalence

[Théorème 1]

[*Avec les hypothèses ci-dessus, on a*] $A' \equiv_{k+1} B'$

[Démonstration] […] Il faut donc prouver que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+1}+(b_i+d)^{k+1}=\sum_{i=1}^{n} b_i^{k+1}+(a_i+d)^{k+1}$$

Ainsi que : $A' \equiv_k B'$.

[…]

Formule utilisée : $(a+b)^j=\sum_{i=1}^{j} \alpha_i a^i b^{j-i}$ [4]

Soit : $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{j} a_i^{k+1}+(b_i+d)^{k+1}$

$$\mathbf{S} = a_1^{k+1}+a_2^{k+1}+\ldots+a_n^{k+1}+ + (b_1+d)^{k+1}+(b_2+d)^{k+1}+\ldots+(b_n+d)^{k+1}$$

de même : $\mathbf{S'} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{k+1}+(a_i+d)^{k+1}$

$$\mathbf{S'} = b_1^{k+1}+b_2^{k+1}+\ldots+b_n^{k+1}+ + (a_1+d)^{k+1}+(a_2+d)^{k+1}+\ldots+(a_n+d)^{k+1}$$

Or puisque $A \equiv_k B$, on a :

$$[S_k] \quad a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k = b_1^k+b_2^k+\ldots+b_n^k$$

$$[S_{k-1}] \quad a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+\ldots+a_n^{k-1} = b_1^{k-1}+b_2^{k-1}+\ldots+b_n^{k-1}$$

...

$$[S_2] \quad a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 = b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2$$

$$[S_1] \quad a_1+a_2+\ldots+a_n = b_1+b_2+\ldots+b_n$$

En développant **S** et **S'** avec la formule indiquée pour des valeurs de j allant de 0 à k+1, on remarque que les termes apparaissent de la même manière dans **S** et **S'** et que les sommes précédentes $[S_k,S_{k-1},\ldots,S_2,S_1]$ apparaissent aussi avec les mêmes coefficients, donc :

$$\mathbf{S = S'}$$

De même, il est facile de démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k+(b_i+d)^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k+(a_i+d)^k$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k+(b_i+d)^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k+(a_i+d)^k$$

...

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k+(b_i+d)^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k+(a_i+d)^k$$

Donc : **si** $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv_k (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, **alors** $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1+d, b_2+d, \ldots, b_n+d) \equiv_{k+1} (b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1+d, a_2+d, \ldots, a_n+d)$ *

calcul de T(0) , T(1), …

On a (2) $\equiv_0$ (6). Puisqu'on a un exemple ~~où T(0)=1~~ [de k-équivalence de familles de avec k =0 et n=1], alors T(0) ⩤1.

Si T(0)=0, alors A et B n'ont pas de sens, donc T(0)>0.

On a 0<T(0) ⩤1. Comme on cherche ~~la plus petite~~ [une] valeur entière ~~de~~ [pour] T(0), on a **T(0) = 1**.

[…] On a un exemple d'ensembles 1-équivalents à 2 éléments : (6,4) $\equiv_1$ (3,7), car 1+1=1+1 et 6 +4 = 3+7. Donc T(1) ⩤2.

On montre ensuite que T(1)>1. Si T(1)=1, alors on a [deux familles 1-équivalentes,] A=(a) et B=(b), ce qui implique a=b et A=B. Par définition c'est impossible. Donc T(1)>1.

[Donc][…] **T(1) = 2**.

On conjecture maintenant […]

[**Conjecture 1**]

$$T(k) = k+1 \quad [\textit{pour tout } k]$$

Vérifions que T(2)=3 .

[**Théorème 2**]

$$T(2) = 3$$

On sait que T(2) ≤3, car on aun exemple de 2 ensembles 2-équivalents avec 3 éléments.

$$(0,4,5) \equiv_0 (1,2,6).$$

En effet on a :
$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$
$$0 + 4 + 5 = 1 + 2 + 6$$
$$0 + 16 + 25 = 1 + 4 + 36$$

On va chercher à prouver par l'absurde que T(2) ≠2, donc que T(2)>2. [5]

Si T(2)=2, alors il existe 2 ~~ensembles~~ [familles] A et B 2-équivalents avec 2 éléments tels que :

A=(a,b), B=(c,d) avec $a \neq c$, a $\neq d$ et $b \neq c$, $b \neq d$, et $A \equiv_2 B$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} [S_2] & a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ [S_1] & a^1 + b^1 = c^1 + d^1 \\ [S_0] & a^0 + b^0 = c^0 + d^0 \end{cases}$$

[…] En remplaçant a par $c+d-b$ [dans S_2, on obtient :]

$$2b^2 - 2bc - 2bd + 2cd = 0$$

d'où $2(b - c)(b - d) = 0$

et $b = c$ ou $b = d$.

Comme $a=c+d-b$, on a $a=d$ ou $a=c$ et $b=c$ ou $b=d$, ce qui est impossible car A et B seraient les mêmes ensembles. On en déduit alors que T(2)>2. […] *

[**Théorème 3**]

$$T(3) = 4$$

Dire que T(3)=3 implique [l'existence de familles différentes $\{a,b,c\}$ et $\{d,e,f\}$ vérifiant] le système suivant :

$$\begin{cases} [S_0] & 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 \\ [S_1] & a + b + c = d + e + f \\ [S_2] & a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2 \\ [S_3] & a^3 + b^3 + c^3 = d^3 + e^3 + f^3 \end{cases}$$

On sait que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ En élevant S_1 au carré et en soustrayant S_2, puis en divisant par 2, on obtient la deuxième ligne d'un système équivalent […] :

$$[L_2] \qquad ab+bc+ca = de+ef+fd$$

De la même manière, on a : $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+ +3a^2b+3b^2c+3c^2a+3b^2a+3c^2b+3c^2a+6abc.$

En élevant S_1 au cube et en combinant avec S_1 et S_3 ,

$$\frac{(S_1)^3 - 3S_1 \times S_2 + 2S_3}{6} = L_3$$

On obtient le système auxiliaire [équivalent] suivant :

$$\begin{cases} [S_1] & a + b + c = d + e + f \\ [L_2] & ab+bc+ca = de+ef+fd \\ [L_3] & abc = def \end{cases}$$

Ce système traduit l'égalité de deux <u>polynômes</u> :

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

et $$Q(x) = (x-d)(x-e)(x-f)$$

car en les développant on obtient des coefficients égaux. Or ces deux polynômes sont égaux si et seulement si $\{a,b,c\}=\{d,e,f\}$ [6], ce qui contredit nos hypothèses. Donc T(3)>3 [5].

[…] Les ensembles suivants sont 3 équivalents et non 4-équivalents :

$A=\{1,4,5,8\}$ et $B=\{2,2,7,7\}$

On a donc T(3) < 5.
Conclusion : […] T(3) = 4 .

exemples de T(k) = k+1

$$(6) \equiv_0 (8)$$
$$(3,7) \equiv_1 (4,6)$$
$$(0,4,5) \equiv_2 (1,2,6)$$
$$(1,4,5,8) \equiv_3 (2,2,7,7)$$
$$(0,8,13,25,26) \equiv_4 (1,5,18,20,28)$$
$$(0,15,25,57,62,86) \equiv_5 (2,11,40,42,69,85)$$
$$(0,18,19,50,56,79,81) \equiv_6 (1,11,30,39,68,70,84)$$

[Ces exemples prouvent l'inégalité T(k) $\leq k+1$ pour $k \leq 6$. ([7])]

Nous pensons que pour 4,5 et 6, la méthode exposée pour 2 et 3 [[8]] s'applique avec un peu plus de calcul.

Notes des éditeurs

1 — Pour une solution particulière obtenue à partir du pliage d'une bande de papier, voir J.-P. Allouche, Les automates finis en mathématiques, *Actes MATh.en.JEANS* 1995, pp. 159-166. Pour des références voir problème D1 in R. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer V., 2nd ed. , New York (…), 1994. Pour une discussion du problème général, voir Bruno Langlois, Le problème de Tarry-Escott, *Quadrature* n°38, avril-mai-juin 2000, Marseille, pp. 31-36.

2 — Les auteurs remarquent que pour j=0, la condition exprime l'égalité des nombres de termes de A et de B : nous avons simplifié en considérant n termes dès le départ.

3— Les éléments (on utilise plutôt les mots "termes" ou "membres") d'une famille ne sont pas forcément différent : ils sont comptés autant de fois qu'ils apparaissent.

4 — Le coefficient α_i dépend aussi de j (il s'agit de la *formule du binôme*). En fait, dans le raisonnement qui suit, sa valeur précise n'a pas d'importance. ⋆

5 — Il semble évident aux auteurs que T(k) ne peut être inférieur à k. Pour k =0, 1, 2 et 3 cela résulte effectivement de leurs preuves (deux familles k-équivalentes ayant moins de k termes peuvant toujours être allongées avec des 0 pour former des familles de k termes). Mais pour k>3, ce n'est pas si clair.

6 — Cela résulte du fait que Q s'annule pour a, b, et c.

7 — Les méthodes de construction de ces exemples ne nous sont, hélas, pas parvenues. Remarquons que la méthode proposée par L. Habsieger comme piste de recherche permet, avec d=1, de passer de $(1,5,6) \equiv_2 (2,3,7)$ à $(1,4,5,8) \equiv_3 (2,2,7,7)$. Il est à noter que T(10) est encore inconnu ! (cf. B. Langlois, *op. cit.*).

8 — Cette méthode consiste à établir l'inégalité T(k)>k en démontrant que, si deux familles de k nombres $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ et $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ sont k-équivalentes, elles sont égales. La preuve fonctionne ainsi : il s'agit de combiner les égalités entre les sommes des puissances j-ièmes ($0 \leq j \leq k$), afin d' obtenir l'égalité des coefficients de même degré dans les polynômes $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$ et $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_k)$. Ces polynômes seront donc égaux et auront les mêmes *racines* : $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pour $P(x)$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ pour $Q(x)$. (Remarquons que chaque coefficient est une *fonction symétrique* particulière de ces racines, c'est à dire une expression algébrique qui ne change pas de valeur lorsqu'on change l'ordre des lettres).